

Les opérateurs logiques

1) Les fonctions de base :

1-1) La fonction NON

Symbole :

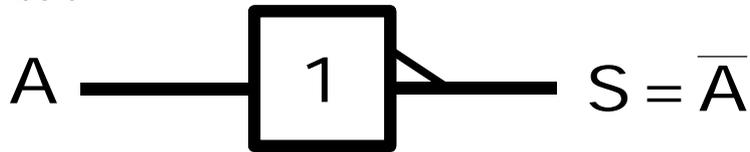


Table de vérité	
A	S
0	1
1	0

Remarque :

S est le complément de A

1-2) La fonction ET

Symbole :

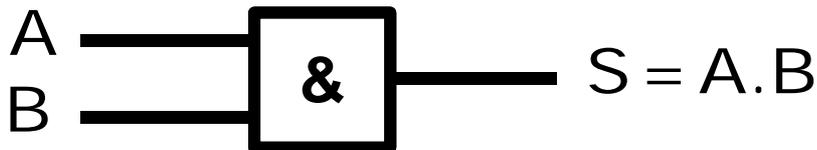


Table de vérité ET		
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarques :

S vaut 1 ssi toutes les entrées sont à 1

S vaut 0 à partir du moment où une entrée est à 0

Une porte ET peut avoir plus de 2 entrées (2, 3, 4 entrées, ou plus).

1-3) La fonction OU

Symbole :

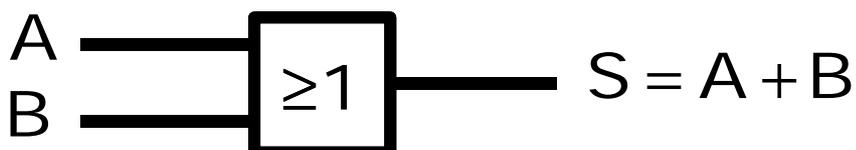


Table de vérité OU		
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Remarques :

S vaut 0 ssi toutes les entrées sont à 0

S vaut 1 à partir du moment où une entrée est à 1

Une porte OU peut avoir plus de 2 entrées (2, 3, 4 entrées, ou plus).

1-4) La fonction ET-NON

Symbole :

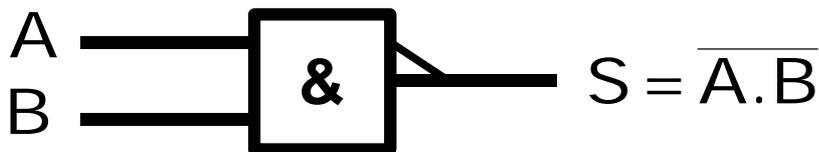


Table de vérité ET - NON		
A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Remarques :

S vaut 0 ssi toutes les entrées sont à 1

S vaut 1 à partir du moment où une entrée est à 0

Une porte ET-NON est simplement une porte ET suivie d'une porte NON

1-5) La fonction OU-NON

Symbole :

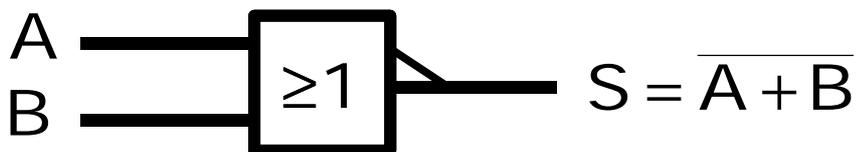


Table de vérité OU - NON		
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Remarques :

S vaut 1 ssi toutes les entrées sont à 0

S vaut 0 à partir du moment où une entrée est à 1

Une porte OU-NON est simplement une porte OU suivie d'une porte NON

2) Propriétés de l'algèbre de Boole :

(George BOOLE était un mathématicien britannique, 1815 – 1864)

13 propriétés, dont 4 fondamentales (en GRAS) :

- La commutativité : $A.B = B.A$
 $A + B = B + A$
- L'associativité : $(A.B).C = A.(B.C)$
 $(A + B) + C = A + (B + C)$
- La priorité : $A + B.C = A + (B.C)$
Le ET est prioritaire devant le OU (comme en arithmétique, la multiplication est prioritaire devant l'addition)
- La distributivité : $A.(B + C) = (A.B) + (A.C) = A.B + A.C$
Distributivité de la multiplication, comme en arithmétique

$$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$$

En logique, il y a distributivité de l'addition (ce qui n'est pas du tout le cas en arithmétique)

- Les éléments neutres : $A.1 = A$
 $A + 0 = A$
- Les éléments absorbants : $A.0 = 0$
 $A + 1 = 1$
- La complémentarité : $A.\bar{A} = 0$
 $A + \bar{A} = 1$
- L'idempotence : $A.A = A$
 $A + A = A$
A peut être une expression
- Théorème d'involution : $\overline{\bar{A}} = A$
 $\overline{\overline{\bar{A}}} = \bar{A}$
- Théorème d'inclusion : $A.B + A.\bar{B} = A$
 $(A + B).(A + \bar{B}) = A$

Démonstration : mettre A en facteur (distributivité " à l'envers ") :

$$A.B + A.\bar{B} = A.(B + \bar{B}) = A$$

$$(A + B).(A + \bar{B}) = A + B.\bar{B} = A$$

- Théorème d'allégement : $A.(\bar{A} + B) = A.B$
 $A + \bar{A}.B = A + B$

Démonstration : utiliser la distributivité (du ET et du OU) :

$$A.(\bar{A} + B) = A.\bar{A} + A.B = A.B$$

$$A + \bar{A}.B = (A + \bar{A}).(A + B) = A + B$$

- Théorème d'absorption : $A.(A + B) = A$
 $A + (A.B) = A$

Démonstration par la distributivité du ET (*utilisée dans les 2 sens*) :

$$A.(A + B) = A.A + A.B \quad (\text{distributivité du ET})$$

$$= A + A.B \quad (2^{\text{ème}} \text{ forme du théorème d'absorption})$$

$$= A.(B + 1) \quad (\text{mise en facteur de A : distributivité du ET "à l'envers"})$$

$$= A.1$$

$$= A$$

Démonstration par la distributivité du OU (*utilisée dans les 2 sens*) :

$$A + A.B = (A + A).(A + B) \quad (\text{distributivité du OU})$$

$$= A.(A + B) \quad (1^{\text{ère}} \text{ forme du théorème d'absorption})$$

$$= (A + 0).(A + B) \quad (\text{pour y voir plus clair dans ce qui va suivre ...})$$

$$= A + (B.0) \quad (\text{distributivité du OU à l'envers : "factorisation par l'addition"})$$

$$= A + 0$$

$$= A$$

- Théorème de De Morgan : $\overline{A.B} = \bar{A} + \bar{B} \quad \blacktriangleright \text{porte ET-NON}$

$$\overline{A + B} = \bar{A} . \bar{B} \quad \blacktriangleright \text{porte OU-NON}$$

Exemples d'application :

Utilisation de la distributivité du OU ("à l'envers") :

$$(B + \bar{C}).(A + B) = ? = B + A.\bar{C}$$

Simplification par le théorème d'absorption :

$$E + F + \bar{D}.C.(E + F).(D + \bar{E}).B.\bar{A}.\text{etc...} = ? = E + F$$

3) Les fonctions OU-Exclusif et OU-Exclusif-NON :

3-1) La fonction OU-Exclusif

Symbole :

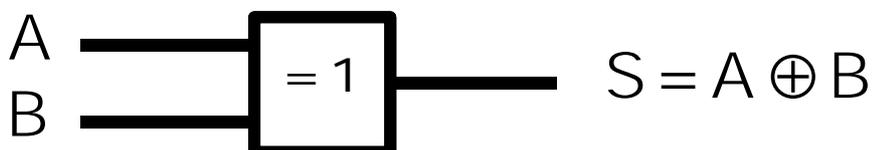


Table de vérité OU -Exclusif		
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Remarques :

S vaut 0 ssi les deux entrées sont égales

S vaut 1 ssi les deux entrées ont des valeurs différentes

Une porte OU-Exclusif a toujours 2 entrées (ni plus, ni moins)

3-2) La fonction OU-Exclusif-NON

Symbole :

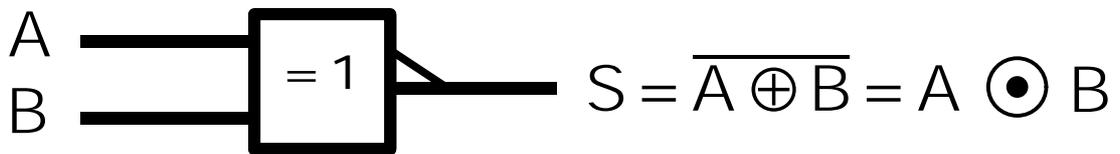


Table de vérité OU-Exclusif-NON		
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarques :

S vaut 1 ssi les deux entrées sont égales

S vaut 0 ssi les deux entrées ont des valeurs différentes

Une porte OU-Exclusif-NON est simplement une porte OU-Exclusif suivie d'une porte NON

3-3) Equations autour du OU-Eclusif :

Comme le montre les tables de vérité, on a :

$$A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

Et :

$$A \odot B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Autres expressions des OU-Exclusifs :

$$A \oplus B = \overline{A \odot B} = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

$$A \odot B = \overline{A \oplus B} = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$$