Des Mathématiques et des Hommes

Jean-Pierre Aubin et Georges Haddad[1]

1. Introduction : impossible de définir les mathématiques

« *Si personne ne me le demande, je le sais bien, mais si on me le demande, et que j'entreprenne de l'expliquer, je trouve que je l'ignore* » avouait à propos du temps saint Augustin dans le Livre XI de ses *Confessions.* C'est le même sentiment qui nous inspire pour parler des mathématiques ou plutôt, des mathématiciens, et bien plus généralement, des hommes et des femmes, puisque ce sont eux qui, professionnellement ou en amateurs, souvent, sans en prendre conscience, utilisent et créent les mathématiques.

Ce n'est d'ailleurs pas un avis partagé par tous les mathématiciens, car la tentation est forte chez beaucoup d'entre eux (dont nous ne sommes pas) de céder à la conviction de découvrir ou dévoiler ce qui préexiste plutôt que d'inventer ou de créer de nouveaux concepts, tant sont puissantes les idées qui semblent « s'imposer d'ailleurs » et tant est aveuglante la clarté qu'elles projettent. Façonnées par les cerveaux humains, elles sont aussi diverses que sont les caractères, les motivations et les préoccupations des êtres humains. Certains vous diront que les mathématiques contribuent à dévoiler les mystères du monde qui nous entoure, d'autres plaideront pour « les mathématiques pour les mathématiques », à la façon de ceux des artistes qui manifestent « l'art pour l'art « : Jacobi déjà écrivait que «*Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels, mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que, sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde*». Sans oublier que l'utile surgit souvent d'un inutile antérieur. Même la théorie des nombres, dont les spécialistes, de Pythagore, à Gauss en passant par Fermat, revendiquent fièrement l'inutilité, est utilisée de nos jours pour l'élaboration de codes dont le secret protège le déclenchement de têtes nucléaires braquées sur presque tous les points du globe. Pourtant, dans son *A Mathematician's apology*, G. Hardy écrivait qu'il était improbable que l'on trouve des applications militaires de la théorie des nombres et de la théorie de la relativité cinq ans seulement avant que n'explose la première bombe atomique sur Hiroshima!

La curiosité gratuite est-elle alors une condition d'un savoir utile? Nous sommes tentés de répondre positivement. Car la *Libido sciendi*, ce désir passionnel de savoir en est-elle le principal moteur. Et aussi de l'envie de « faire savoir », de communiquer et de partager les découvertes, puisqu'un savoir égoïste n'a d'autre utilité que la jouissance de son propriétaire. Quitte à ce que cette passion conduise au prosélytisme, à l'impérieux besoin d'imposer ses conceptions.

Et peut-être « de le faire savoir », car la fierté et l'orgueil conduisent tout autant que la curiosité les hommes à se dépasser. Mais l'orgueil très souvent confine à la vanité, à la revendication passionnée de sa place dans une hiérarchie qu'il perçoit. Condorcet, spécialiste des éloges de ses collègues disparus, notait que *« pour la plupart, la gloire est le premier objet ; la découverte de la vérité n'était que le second* ». Diderot, dans sa *Réfutation*

[1] Professeur à Université Paris-Dauphine et Président Honoraire de l'Université Panthéon-Sorbonne. Ce texte a été préparé pour le Dictionnaire culturel de la Langue Française des Éditions Robert.

d'Helvétius, notait à propos de Leibniz : « *C'est un être qui se plaît à méditer,... et qui tente une grande découverte pour se faire un grand nom, et éclipser par son éclat celui de ses rivaux, l'unique et le dernier terme de son désir.* Cette autre libido comporte aussi bien des dangers, car elle conduit, comme la seule vanité, à la passion du pouvoir, au moins celui d'influencer les autres. Des phénomènes de mode --- de consensus social --- contribuent à l'évolution continue de critères esthétiques et sociologiques qui mettent en valeur tel ou tel sujet. Comme dans d'autres domaines de la science et des arts, l'histoire secrète des idées et la sociologie de la création intellectuelle ignore encore les raisons qui portent certains sujets ou certains savants au pinacle et relèguent les autres dans l'oubli, célèbre les premiers et méprise les seconds. Cette histoire est tellement différente de l'histoire «hagiographique» des idées qui est communément enseignée. Car Lesmosyne, la déesse de l'oubli, s'abat le plus souvent sur les authentiques précurseurs, qui ont eu raison trop tôt, «*hommes sans descendance*» selon Lucien Febvre, à cause de leurs étonnantes intuitions et de leurs anticipations prématurées, tandis que Mnémosyne, déesse de la mémoire, se lève pour faire sonner les trompettes de la renommée de certains de ceux qui sont arrivés à temps, lorsque le terrain culturel est préparé pour que le message soit perçu. Ici comme dans les autres domaines, les lois de la mode restent à élucider.

Certains préfèrent relever des défis lancés par d'autres mathématiciens ou tenter de résoudre des conjectures formulées par des mathématiciens perçus comme prestigieux, d'autant plus noble que le défi est ancien. L'exemple le plus célèbre est celui du dernier et Grand Théorème de Fermat, challenge d'autant plus attirant que l'énoncé en était simple et que tous les autres théorèmes que Fermat avait énoncés sans preuve écrite furent très vite démontrés. Fermat doit être remercié d'avoir mis au défi tant de mathématiciens qui ont pour cela frayé de nombreuses voies et forgé maints outils mathématiques parmi lesquels ceux qui ont permis à Andrew Wiles d'en donner une démonstration en 1995. Mais « la remarquable preuve » que Fermat n'avait pu inscrire dans la marge trop étroite du livre de Diophante traitant de ces questions n'a pas, elle, été retrouvée.

Certains privilégient la résolution de problèmes à tout prix, d'autres préfèrent élucider pourquoi de tels problèmes sont solubles, faire le lien avec d'autres situations a priori différentes, chercher ce qu'il y a derrière tout cela, économiser les concepts, raccourcir ou supprimer les étapes des raisonnements, déceler des structures communes, des régularités soigneusement celées aux regards inattentifs ou insouciants. Certains identifient mathématiques et calcul, faisant jouer un rôle prépondérant au mesurable et au « quantitatif », à ce qu'il y a plus de trois siècles, le philosophe allemand Ehrard Wiegel appelait la «pantometria», science qui consiste à tout mesurer, qui de nos jours, fait de nombreux adeptes, surtout Outre-Atlantique. Tandis que d'autres s'attacheront à dégager des propriétés qualitatives et conceptuelles au sein même des mathématiques, qui concernent par exemple les systèmes vivants, qui sont rebelles à la mesure, bien que nombreux sont ceux qui tentent d'étalonner toute chose à l'aide du dollar. Certains identifieront points de vue mathématiques et déterministes, après le succès de la mécanique newtonienne et la proclamation du manifeste de Laplace, tandis que d'autres s'attacheront à introduire de maintes façons telle ou telle description mathématique de certaines facettes de l'incertitude, du hasard, de la contingence, du probable, du stochastique, du tychastique, de l'aléa, de la rencontre fortuite de plusieurs séries causales, etc.

D'autres vous diront que les mathématiques sont ceci ou cela, mais jamais la même chose, et ils vous décriront de fait ce qu'ils connaissent, de façon nécessairement partielle, partiale, datée et localisée.

2. Point de vue cognitif

Nous suggérons plutôt de choisir un autre point de vue pour tenter de parler des mathématiques, les considérant comme *le résultat de processus cognitifs élaborés par les cerveaux humains*. De même que tout cerveau humain a la faculté d'apprendre une langue --- la langue maternelle --- dont le choix contingent est fourni par l'environnement, de même il a la capacité de faire des mathématiques, comme celle de faire de la musique, de dessiner et peindre et ensuite, d'écrire, de sculpter, de croire, d'obéir, tant aux autres êtres humains qu'à des codes culturels. Codes culturels qui non seulement permettent de vivre en société, mais de partager une même interprétation du monde. L'hypothèse sous-jacente à la notion de grammaire universelle, dite générative (ou transformationnelle) pourrait fort bien se transposer aux processus cognitifs sous-jacents à la création mathématique. Dans les deux cas, les raisonnements et les démonstrations utilisent un petit nombre de modèles abstraits innés de phrases, de calculs ou plus généralement de mécanismes instinctifs --- Les sciences cognitives ne tarderont pas à nous éclairer là dessus. Mais les similitudes sont frappantes, et il devient bien difficile à faire la part entre les processus de création linguistiques et mathématiques, surtout si l'on remonte au niveau d'élaboration des concepts.

Ces processus sont communs aux cerveaux humains et varient peu dans le temps, ou alors très lentement. Ce sont les produits de ces processus qui évoluent de plus en plus rapidement, grâce aux possibilités de stockage des productions culturelles et des informations que peuvent utiliser les générations ultérieures.

Toutes ces potentialités cognitives existent, il suffit d'observer les jeunes enfants. De même que le choix de la langue, tout comme ceux des critères esthétiques et culturels, est fourni par l'environnement au jeune enfant, de même les jeunes cerveaux humains utiliseront leurs facultés mathématiques pour apprendre les mathématiques de la société dans laquelle ils vivent. Et de même qu'il est de plus en plus difficile d'apprendre une langue lorsque l'on devient adulte, de même confond-on l'absence de la « bosse des maths » avec une mise en jachère du cerveau lorsqu'il était temps d'exercer ses potentialités. Ces processus cognitifs doivent être dans un premier temps être traités ensemble, avant de cerner les différences qui existent entre langage et mathématiques, souvent considérées comme une langue particulière, ce qui n'est qu'en partie vrai. S'il n'y a pas de mathématiques sans langage, les mathématiques sont autre chose qu'une langue. Ou encore pourrait-on partir de la perception visuelle pour faire la part de l'art pictural et de la géométrie, du rôle des critères esthétiques et de la beauté, etc., de l'écriture d'une langue du choix des notations mathématiques et des définitions. Les frontières ne sont jamais nettes, comme dans toute tentative de classification, mais les différences sont patentes entre ces diverses capacités cognitives.

Un exposé liminaire de ces pré-requis cognitifs s'impose donc.

3. Perception

La perception de l'environnement comporte deux phases : celle de la perception sensorielle et celle de son interprétation. L'environnement est perçu, directement ou indirectement, par la médiation de toute une batterie d'instruments de mesure. Un instrument de mesure conçu par l'homme associe à chaque état de l'environnement observé un nombre d'unités de mesure. En utilisant un instrument de mesure, l'observateur perçoit ce qui sera appelé une variable qui lui est associée. Dans ce cas, l'état dans lequel se situe cette variable est égal aux nombres d'unités de mesure de cette variable. Par exemple, les états de la variable «température» d'un objet sont décrits par des nombres mesurés par un thermomètre. De même, à l'aide de ses sens, l'être humain a la capacité de classer les perceptions du monde extérieur : chaque combinaison des cinq sens de la perception sensorielle joue le rôle d'un instrument de mesure «conceptuel» : il procure ainsi au cerveau une perception de l'environnement, qui joue ainsi le rôle de variable. Une telle combinaison sensorielle associe donc à tout état de l'environnement l'état dans lequel se trouve la variable correspondante. La perception permet de «rétroagir» sur les actions de l'individu sur son environnement pour s'y adapter, de les corriger, ce qui est à la base même de l'apprentissage. Malheureusement, nos instruments de perception sensorielle n'ont pas la simplicité des instruments de mesure façonnés par l'homme. Mais l'idée est la même.

On estime le nombre des messages sensoriels reçus par un être humain à plus de dix mille par seconde, qui vont ensuite transiter par des millions de milliards de synapses qui relient les quelques cent milliards de neurones de notre cerveau! Les mécanismes d'interprétation des perceptions structurent et ordonnent ce chaos sensoriel.

L'interprétation de la perception commence par celle d'un ensemble d'instruments de mesure ou de perception sensorielle appliqués à un environnement donné. Il ne prétend pas décrire l'environnement, mais sa perception physique et physiologique. Perception de nature quantitative, lorsque les états des variables physiques sont décrits par des nombres, ou perception psychologique, de nature qualitative. Pour simplifier, on convient de regrouper dorénavant instruments de mesure et instruments de perception sensorielle sous le nom d'instruments conceptuels.

Une première conséquence de l'adoption d'un système pour interpréter l'environnement est *la possibilité de classer les états de cet environnement en variables équivalentes*. Le problème se pose d'ailleurs de savoir comment les hommes choisissent leurs instruments de mesure conceptuels pour créer des classes de variables. Ce choix évolue, car on ne cesse d'ajouter, d'ôter ou de modifier des instruments de perception, ce qui conduit chaque fois à changer l'interprétation de la perception de l'environnement. C'est alors qu'un bel ordonnancement de l'évolution des variables peut être chamboulé, lorsque l'environnement évolue ou lorsqu'un instrument de mesure conceptuel est ajouté ou supprimé. Il faut alors remplacer l'interprétation de la perception par une autre, qui rétablit si possible des observations intelligibles --- ou perçues comme «belles» --- des «évolutions simples» (au sens où elles entrent probablement en résonance avec celles des «neurotransmetteurs» qui tournent sans cesse et dans tous les sens (mais certainement pas n'importe comment) dans les synapses de nos cerveaux). On peut concevoir des sortes d'opérations sur ces variables qui résultent d'opérations sur les instruments de mesure conceptuels. Par exemple, en utilisant ensemble deux tels instruments, deux états équivalents au regard du premier instrument ne le sont plus nécessairement au regard du second. Ils sont équivalents par rapport au complexe formé de ces deux instruments s'ils sont équivalents au regard de chacun d'entre eux. En utilisant conjointement deux instruments de mesure conceptuels, on rétrécit la classe d'équivalence conjointe. Plus on introduit d'instruments, plus on affine la classification, plus on précise la notion de variable. Naturellement, comme ces instruments de mesure conceptuels sont activés par le système nerveux, ils ne peuvent être choisis arbitrairement et il y a certainement des limites à leur mise en oeuvre «parallèle». Au lieu d'être utilisés conjointement, ces instruments de mesure conceptuels peuvent être utilisés successivement. Un premier état est équivalent à un second au regard du premier instrument, ce second à un troisième au regard d'un second instrument, et ainsi de suite. En activant «en série» des instruments de mesure conceptuels, on construit de nouvelles classes d'équivalence, enclenchant ainsi un processus dynamique qui joue avec des théories (suites) de représentations, des *enschaînures de preuves*, comme disait Cyrano de Bergerac.

La prise de conscience de ces mécanismes de perception est à la base des activités cognitives spécifiquement mathématiques.

4. Réalité individuelle

Au niveau d'un l'individu, le concept de «réalité» pourrait être défini comme sa propre perception de l'environnement. Elle peut former également la réalité d'animaux supérieurs. De plus, à partir d'un certain stade de l'évolution, les systèmes nerveux ont la capacité d'interpréter non seulement la perception sensorielle de l'environnement, mais aussi celle de circuits endogènes, tant innés qu'acquis par apprentissage, et mémorisés. La remémoration, c'est-à-dire le mécanisme de relecture, est déclenchée par la perception de certains stimuli. L'oubli est un défaut de ce mécanisme de relecture (et non pas du mécanisme d'enregistrement). Mais chez les hommes, la remémoration est aussi un processus de reconstruction. Ce dont on se souvient, ce sont également des reconstructions, des abstractions idéales, obtenues en réactivant, comparant et reconnaissant tel ou tel souvenir. Ce ne sont pas les souvenirs qui sont perdus, mais la capacité de les sélectionner et de les combiner. La relecture n'est pas seulement le déroulement d'in souvenir, comme la projection d'un film, mais aussi sa réalisation. Ceci nous permet de vivre dans le présent, de revivre dans un passé reconstruit et de se fabriquer un avenir. A chaque instant, le passé est recréé, et jamais de la même façon, car il dépend du choix des mécanismes de relecture et d'interprétation mobilisés. Comme le cerveau humain est capable de créer des séquences perceptives de façon endogène, en plus de ceux stimulés par la perception sensorielle, il est capable de « produire l'avenir », de l'anticiper. Il n'est pas impossible que la pensée s'inscrive dans cette formalisation, puisqu'elle implique la mise en oeuvre d'hypothèses pour les comparer ensuite avec la perception de l'environnement (y compris sa composante « culturelle ») chez l'homme. Ce processus dynamique de tâtonnement (*de prévision et correction)* semble être assez universel pour interpréter le monde, y compris de façon mathématique.

5. Langages

Mais le cerveau des hommes s'est enrichi de processus de reconnaissance de l'environnement et de son interprétation à l'aide du langage. Les bébés savent parler, comme ils savent marcher, potentiellement. L'instinct du langage, comme celui des mathématiques, comme l'instinct de la foi, est propre à notre espèce. Il faudrait parler d'instincts, au pluriel, car nombreux sont les mécanismes cognitifs qui interviennent dans les processus d'acquisition, de production et de compréhension du langage.

Rien ne semble inéluctable dans le passage de *l'Australopithecus afarensis* à *l'Homo sapiens sapiens*, ne serait-ce que parce que ce lointain ancêtre s'est dressé sur ses deux pattes il y a cinq millions d'années, que plus de deux millions et demi d'années se sont écoulées entre la bipédie et le début de la fabrication d'outils, et un autre million d'années avant le dernier accroissement brusque de la capacité cérébrale, il y a 500.000 ans. L'Homo erectus quittait l'Afrique il y a 350.000 ans et laissait la place à l'Homo sapiens sapiens il y a un peu plus de cent mille ans. Le moment de l'apparition du langage ne fait pas l'unanimité. Il est probablement apparu quelque part en Afrique de l'Est il y près de 150.000 ans. L'embryogenèse nous révèle que le cerveau du fœtus humain est le même que celui du chimpanzé jusqu'à la 27ème semaine : des sillons ébauchés dans l'importante aire visuelle des primates se ferme chez l'homme, laissant la place à l'aire corticale de Wernicke qui, dans l'hémisphère gauche du cerveau, est impliquée dans la formation des concepts et du langage, tandis qu'une autre aire corticale, celle de Broca, est engagée dans le contrôle de la parole. Quelles que soient les causes de l'émergence du langage, de l'apparition dans la phylogenèse du couplage peut-être fortuit entre les aires de Broca et de Wernicke dans l'hémisphère gauche du cerveau et la descente dans le cou du larynx, le langage n'a pas servi seulement à améliorer l'organisation de la chasse et de la cueillette. C'est une faculté caractéristique de l'espèce humaine, comme le radar l'est chez les chauves-souris ou le sonar chez les mammifères marins.

Car dès son apparition, nos ancêtres n'ont pas dû résister longtemps aux charmes de la rhétorique, qui séduit et console, qui rassérène et réjouit, qui avertit et qui blesse, qui informe et qui trompe. Il est tentant de penser que l'activité mathématique a commencé aussitôt ou peu après, pour aller au-delà de la distinction de l'un et du multiple en le précisant, en dépassant la simple énumération pour concevoir le concept de nombre. Le ou les mathématiciens inconnus qui ont reconnu une même propriété dans cinq doigts, cinq cailloux (calculs), cinq antilopes, qui ont prononcé dans leur langue le mot «cinq» et qui ont gravé cinq encoches dans une corne d'aurochs, méritent sans aucun doute un des grands monuments que l'on devrait dresser à la mémoire des savants méconnus.

Ces mécanismes innés pourraient consister en l'ouverture programmée dans le temps, et durant seulement certaines périodes, de certains circuits cérébraux permettant de faire fonctionner des grammaires et confectionner des phrases, en ce qui concerne la langue, de reconnaître des régularités, d'énumérer, de concevoir des concepts de nombres de moins en moins naturels, de reconnaître les formes géométriques (bien après la reconnaissance des formes naturelles comme celles des animaux, faculté probablement héritée de la phylogenèse) et d'opérer des déductions logiques, en ce qui concerne les mathématiques.

L'acquisition du langage chez un individu comporte plusieurs étapes bien étudiées. On sait que dès les premières heures de son existence, l'enfant de l'homme sait distinguer et différencier du bruit qui l'entoure les sons caractéristiques des langues. Ensuite, le babil des bébés que tant de parents s'efforcent d'imiter apparaît entre six et dix mois (de sorte que ces bébés, fiers des prouesses des adultes, renforcent ceux des sons qui les émerveillent tant). Les mots, eux, sont reconnus entre douze et dix-huit mois, et leurs associations doivent attendre dix-huit mois et plus. La syntaxe commence à se former plus tard. On observe que les erreurs sont communes à la plupart des enfants. L'implantation de ce programme d'origine biologique est assurée dès la troisième année. La suite n'est que raffinement des processus mis en place. Il en est de même de l'acquisition des mathématiques, la capacité d'énumération prenant place avant la conceptualisation de nombre, par exemple, selon un programme d'origine biologique, moins bien étudié pour l'instant.

En naissant, chaque enfant réinvente la langue autant qu'il l'apprend. Il la recrée, l'expérimente en interaction avec l'environnement, selon un programme épigénétique qui devient de plus en plus labile avec le temps, et qui finit par se tarir à l'âge adulte. Il en est de même avec les mathématiques, que l'on apprend et apprécie que si on la recrée. Il suffit d'admirer le plaisir qu'ont les enfants à découvrir (et peut-être inventer) l'énumération ainsi que d'autres régularités. Cela est peut-être moins naturel que le simple langage, demande probablement plus d'efforts, d'autant que ce processus autonome et actif n'est pas encouragé lors de l'apprentissage scolaire traditionnel des mathématiques.

6. Réalité sociale

Les êtres humains agissent non seulement en transformant le milieu physique par leur travail et leur industrie, le milieu organique par la chasse et la cueillette, l'agriculture et l'élevage, en le complétant par un milieu culturel, mais en agissant les uns sur les autres dans le milieu social à travers des systèmes de communication entre agents à la fois émetteurs de signes et récepteurs de symboles. Systèmes de communication extrêmement complexes, parmi lesquels figure le langage qui a été ajouté à ceux hérités de la phylogenèse.

Pierre Janet soulignait que le langage est né des actes de commandement et d'obéissance : si l'obéissance aux ordres est nécessaire pour assurer la sociabilité d'un groupe, le langage, en permettant une communication riche entre individus, permit surtout de confronter la perception du monde des individus d'un groupe social, et de partager leur interprétation du monde.

Depuis que le petit de l'homme, dès l'âge de neuf mois, désigne du doigt à l'attention de ses parents un objet qui l'intéresse et vérifie s'ils ont bien perçu le même objet, l'homme, animal social avant même d'être animal politique, comme le soulignait Aristote, tente non seulement de comparer sa perception du monde à celle de ses semblables, mais s'efforce également de la partager et de l'influencer. La communication culturelle était née, le langage, tout comme la peinture, la sculpture, la musique, la danse, les mathématiques, etc. devint aussi un outil de manipulation de l'homme par l'homme, d'action de l'homme sur l'homme.

Mais on doit aller plus loin : le langage a aussi permis de percevoir la réalité perçue par un autre système nerveux et de la comparer à la sienne.

La réalité est ainsi non seulement une construction intellectuelle de nature individuelle, mais également une construction culturelle de nature sociale. C'est pour cela que l'on pourrait définir la réalité d'un groupe social à un instant donné comme le consensus de ses membres sur leurs perceptions de l'environnement.

Le consensus sur les perceptions du monde permet de donner à celui-ci un sens --- un sens partagé entre les membres d'un groupe social --- ce sens qui fait l'essence de la réalité. Ainsi définie comme consensus sur les perceptions de l'environnement de ses membres, la réalité est ici un concept relatif à un groupe social donné, évoluant constamment, et de plus en plus rapidement.

Un champ électrique, par exemple, est réel pour un groupe de physiciens, mais ne l'est plus si l'on ajoute des agriculteurs. Le choix de l'adjectif « réel » (qui est apparu subrepticement au début de ce siècle pour remplacer «irrationnel») pour qualifier les nombres les plus difficiles pour l'esprit à construire, aussi abstraits que le nombre $\pi := 3,1416 ...$, illustre à merveille la définition de réalité adoptée. Car qualifier de réel le concept de nombre qui a pris le plus de temps à être défini rigoureusement est une action qui est loin d'être innocente, et qui devrait passionner les sémiologues et analystes de diverses obédiences.

Il est intéressant d'étudier chez les enfants l'apprentissage de la réalité «sociale» au sens où je l'ai définie. Dans le cadre de sa famille, tout est fait à l'avantage du bébé, qui n'est pas soumis à de fortes contraintes sociales et culturelles. Jusqu'au moment où en entrant en contact avec d'autres enfants inconnus qui suivent leur propre intérêt, il est confronté à leurs comportements différents, à la façon dont ils vont réagir aux même défis, où il va faire l'apprentissage de la compétition. Il doit alors faire appel à sa capacité d'imagination pour deviner comment une autre personne perçoit l'environnement, ce qu'elle peut considérer comme vrai ou faux, pour simuler la perception d'autrui dans son cerveau et la comparer à la sienne. Cette faculté d'abstraction (car c'est de cela qu'il s'agit) est nécessaire pour se faire des amis ou avoir de l'influence sur les autres, pour agir dans le milieu social. L'accord n'est pas parfait entre les experts, mais il semblerait que cette capacité soit innée et émerge entre 2 et 3 ans.

Comme le consensus est rarement parfait, sauf peut-être en mathématiques, où les définitions sont rigoureuses (sans que cela implique qu'un concept mathématique représente la même chose dans le cerveau de chaque mathématicien), il est clair que la réalité, même rapportée à un groupe social donné, est souvent floue. C'est ce flou qui permet à la fois aux individus de s'entendre, à un moment donné, quitte à ce que des malentendus surgissent ensuite et provoquent des conflits. Le temps s'étant écoulé, le consensus a évolué, la réalité a changé. Comme l'a souligné Gaston Bachelard (1884-1962), le langage, dont les mots évoquent plus souvent des images que des concepts, qui séduit là où il faudrait déduire, constitue un des plus dangereux « obstacles épistémologiques ».

L'échange verbal, comme l'échange mathématique, requiert une coopération minimale, impliquant les deux interlocuteurs dans une relation de confiance minimale. Car la parole va de pair avec la foi : il faut croire en la parole de l'autre, même si les parades, le mensonge et la trahison, apparaissent en même temps que la vérité et la confiance. C'est la foi qui permit de dégager la notion de temps, pour rappeler le passé et anticiper le futur, qui permit de partager des explications du monde et d'échanger des biens présents contre des promesses de remboursement futur. C'est la foi et la confiance qui permettent à chaque mathématicien d'utiliser sans tous les redémontrer les résultats obtenus par d'autres.

Les hommes manifestent donc une tendance naturelle à se conformer au consensus social. De toutes façons, grand-prêtres, inquisiteurs, professeurs, autorités constituées, gendarmes si besoin est,... tous concourent à maintenir en l'état le consensus entre individus qui forme la réalité d'un groupe social. Mais ce consensus est remis en question par les prophètes, les savants, les contestataires et autres rebelles à l'ordre établi. Si l'on a observé des prophètes devenir grand-prêtres, des savants se muer en professeurs et des révolutionnaires accéder au pouvoir et imposer une nouvelle idéologie, le chemin inverse est bien moins fréquenté.

Toute société a besoin de codes culturels transmis par le langage, non seulement pour respecter des règles, mais pour partager une compréhension commune du monde qui nous entoure.

7. Métaphores et compréhension

Le langage a surtout procuré une contribution supplémentaire à l'imagerie mentale, en réifiant les concepts sous forme de sons et de signes eux-mêmes perceptibles, et ceci, rapidement et sans efforts. Il s'ajoutait aux signaux olfactifs, sonores, visuels et «kinésiques» (gestuels et posturaux), mais sans les remplacer : Nous aurions trop tendance à oublier l'importance éthologique de ces modes de communication que nous avons hérités de la phylogenèse L'invention du dessin, des pictogrammes et de l'écriture a permit de conserver et mémoriser le monde culturel, pour être transmis non seulement à ses voisins immédiats, mais à la postérité, qui n'avait plus besoin de réinventer la roue à chaque génération.

Le langage permet d'élaborer des métaphores pour expliquer un phénomène donné en lui associant un autre qui est plus familier, ou considéré comme tel. «*Il y a une autre faculté propre de l'esprit humain qui fait que lorsque les hommes ne peuvent se former une idée des choses, parce qu'elles sont éloignées et inconnues, ils se les figurent d'après celles qu'ils connaissent, et qui leurs sont présentes*», écrit Giambattista Vico (1688-1744) dès le second axiome de sa Science nouvelle.

C'est ce sentiment de familiarité, individuel ou collectif, inné ou acquis antérieurement par l'éducation, qui procure l'intime conviction d'avoir compris un phénomène à l'aide d'une métaphore.

La compréhension est un désir, une libido, et comme lui, une fois assouvi, le fugace plaisir qu'il en retire s'estompe, le désir réapparaît, la quête reprend. « Post cogitum, matematicus triste », aurait pu écrire Pline l'Ancien. On n'a jamais fini de comprendre, car ce sentiment de satisfaction procuré par une métaphore est provisoire, continuellement remis en question, par la confrontation de la perception de l'action d'un individu sur les divers milieux de son environnement : soit que l'environnement ait évolué, soit qu'un instrument de perception culturel ait été changé. Le malaise qui s'installe est source de nouvelles interrogations, conduisant à rechercher des métaphores plus riches, dont la validation est mieux assurée. Encore faut-il faire en sorte que ce malaise s'installe, ce que les scientifiques tentent par l'expérimentation systématique ou le raisonnement logique, ce que les idéologues évitent en se cantonnant dans l'incantation. Karl Popper observait qu' «*il y a eu, au fil des siècles, des modifications dans nos idées sur ce qui constitue une explication satisfaisante*».

L'élaboration de métaphores oscille entre analyse et synthèse, entre perception des faits et leur interprétation par des théories. La connaissance des théories présuppose celle des faits, et celle des faits suppose celle des théories pour être interprétée. La compréhension va de l'intuition d'une métaphore, cette expérience globale fusionnelle faite de fulgurances qui évoque celle des mystiques et des poètes au raisonnement, qui exige réflexion, arguments, étapes et théories. Elle va de la «vision de l'esprit» (geistige Auschauung) caractéristique du romantisme allemand --- mouvement de retour vers la Nature --- du XVIIème au XIXème siècle à la «raison» du siècle des lumières. La rigueur des définitions et la rigidité des déductions différencient la métaphysique des sciences : l'explication des phénomènes reproductibles par l'expérience ou dont les observations sont périodiques relève de la physique. Celles dont la cohérence est garantie par les règles de la logique ressortent des mathématiques.

8. Abstraction

Après avoir pris la relève des signaux d'alarme qu'utilisent les animaux, les hommes ont d'abord échangé des signes dans le cadre d'un langage de pantomime, puis inventé les verbes intimant les ordres, désigné des objets «concrets» de l'environnement quotidien, ceux qui pouvaient être perçus directement par les cinq sens des individus. C'est la phase magique, où le lien entre le mot et la chose est intime, univoque, où le mot n'a pas encore acquis son autonomie, où le mot est incantatoire, celui qui est encore utilisé dans certains rituels religieux. Une fois né, le langage accompagne l'action des hommes, la double en quelque sorte dans le milieu culturel.

La faculté d'abstraction, qui consiste à représenter de nouveaux états de l'environnement par des signes et symboles qui sont ensuite perçus et de nouveau conceptualisés, est une innovation du cerveau de l'Homo sapiens sapiens. « *Les hommes ont toujours cru remédier à l'ignorance des choses en inventant des mots auxquels ils ne purent jamais attacher un vrai* sens» écrivait Paul Henri Thiry, baron d'Holbach Elle consiste à diviser le continuum sensoriellement perçu en un ensemble discret de variables, ce dont rend compte l'étymologie du verbe «expliquer», puis ensuite à regrouper certaines de ces variables, à «comprendre», c'est-à-dire, toujours selon l'étymologie de ce second verbe, à ordonner, à réorganiser ces variables, bref, à recréer la perception du monde, en un va-et-vient agoniste-antagoniste sans cesse en mouvement d'élaboration de métaphores. Comme le remarquait déjà Wittgenstein, les mots, comme les outils, et comme les résultats mathématiques, tirent leur sens de l'usage que l'on en fait. Le sens d'une phrase, d'un énoncé n'est pas la somme de ceux des mots qui la composent, et le sens de cet énoncé «rétroagit» en quelque sorte sur celui des mots qui le constituent. Depuis Frege, l'on sait en effet que les mots n'ont pas de sens en dehors du contexte du discours où ils s'insèrent.

Les mots constituèrent ainsi un premier étage de l'environnement culturel, sur lequel pouvait donc à son tour opérer la perception sensorielle. Non seulement on pouvait créer des métaphores entre objets «concrets», mais aussi entre objets et éléments du langage, ajoutant ainsi un étage supplémentaire à l'environnement culturel. Il suffisait ensuite de créer des métaphores entre divers éléments du langage pour multiplier les étages de cet environnement culturel. Apparurent probablement ainsi les métaphores entre concepts abstraits et divinités les «personnalisant» par des héros, titans, totems, animaux et autres chimères (animaux composés associés à des concepts composés ?). Les divinités grecques réifiaient des concepts abstraits, comme les immortels zoroastriens (Amesha-Spentas) réifiaient la pensée (vohu mano), la justice (asa), etc., ou encore les Eons gnostiques réifiaient la pensée (Ennoia), la sagesse (Sophia Achamoth) etc. Les sociétés animistes choisissaient dans la faune et la flore qui les entouraient les métaphores donnant un sens au monde perçu. Ces Divinités, en devenant des symboles à la fois imaginaires --- et combien «vivants» --- de concepts abstraits, contribuèrent à la formation de la pensée abstraite, surtout dans les civilisations orales. Jusqu'à ce que Moïse eut l'idée d'attacher un Dieu de façon exclusive à un peuple, inventant l'hénothéisme, première étape sur la voie du monothéisme absolu, tentative d'abstraction ultime à l'origine d'explications monistes si souvent dangereuses lorsqu'elles ne sont pas étayées par l'expérimentation ou la cohérence logique des mathématiques.

Devenue abstraite, l'action verbale s'est révélée aisée et rapide comparée à l'action physique, lente et fatigante. Mais elle n'agit pas directement sur les milieux physique et organique, elle est médiatisée par les milieux sociaux et culturels. L'action verbale agit sur les hommes, immédiatement ou à retardement, grâce à la mémoire. Commençant par émuler l'action physique, elle est ensuite devenue autonome dans le milieu culturel, agissant sur les autres hommes aussi bien que sur le locuteur. L'identification des objets et des phénomènes ne suffisait plus, il fallait les classer entre eux, expliquer, dégager les relations causales ou temporelles, les lier au travers d'une histoire, sentir l'évolution dans un monde alors statique à l'aune du temps humain. L'*Homo scientificus* était né.

Quoiqu'il en soit, le processus d'abstraction était né pour ne plus s'arrêter, oscillant entre poésie et mathématiques, créant des métaphores sans autres contraintes que formelles dans le premier cas (dont les artistes de ce siècle ne tiennent même plus compte en revendiquant une liberté absolue d'expression) ou soumises aux sévères obligations de la logique dans le second. S'il y a eu un progrès quelconque lors de l'évolution de notre espèce, c'est au niveau de la capacité d'abstraction qu'il faut le chercher, abstraction qui a accompagné le progrès technique, le précédant ou le suivant selon les moments.

A quoi bon ajouter aux objets de l'environnement des images, des sons, des gestes, des mots et autres signes? Peut-être parce qu'étant des artefacts (anglicisme commode pour désigner ce qui est fabriqué par les humains), il est plus facile d'agir sur eux, de les combiner, de les dissocier, de les assembler, de pallier l'absence d'objets convoités en créant de l'imaginaire. Ces artefacts que l'homme conçoit d'abord et construit ensuite prennent non seulement la forme d'objets mais aussi de purs concepts culturels (représentations symboliques). On peut faire évoluer signes et symboles à volonté, les réinterpréter et ce faisant, leur donner un sens, grâce à un mécanisme de reconnaissance «sémiologique» approprié. Giambattista Vico allait jusqu'à affirmer que seul Dieu pouvait comprendre le monde physique qu'il avait créé, tandis que l'homme pouvait comprendre les mathématiques, création purement humaine : « [...] *Cette science procède donc comme la géométrie, car elle crée elle-même le monde des grandeurs, en le construisant avec ses propres éléments*.» L'homme peut comprendre tout ce qu'il invente grâce à son *ingenium*, ce que Léonard de Vinci appelait *disegno*, car ce que l'on fabrique est plus simple, à l'esprit, que la nature elle-même. N'ayant pas le contrôle des commandes du monde qui nous entoure, au moins peut-on jouer avec nos mots et nos symboles, expérimenter de nouvelles créations. Ce faisant, on entoure en quelque sorte le noyau dur d'un monde sur lequel on a peu d'emprise de couches successives de mondes culturels sur lesquels on peut agir. Depuis que l'homme vit sur terre, il lui est interdit de tuer, voler, mentir et blasphémer, afin de maintenir la viabilité même de la société dans laquelle il vit. Mais grâce à la peinture, à la littérature et aux nouveaux média, les êtres humains peuvent transgresser ces interdits culturels, tuer, piller, violer, commettre toutes sortes d'adultères dans le monde abstrait qu'il s'est fabriqué. Le milieu culturel offre un refuge aux fantasmes qui ne peuvent s'exprimer --- être «actés» --- dans le milieu social. Malheur à ceux qui n'ont pas su trouver dans l'abstraction l'expression de leurs pulsions.

Allant encore plus loin, les oeuvres d'art, les concepts, incluant ceux élaborés par les mathématiciens et qui s'en sont échappés, ajoutés par les hommes à un monde physique, ne sont pas seulement inertes, comme des objets déposés pour être contemplés et manipulés. Mais perçus à leur tour par des cerveaux humains, les concepts peuvent acquérir aussi une certaine dynamique, devenir des idées-forces selon une suggestion d'Alfred Fouillée malheureusement tombée en désuétude, idées qui commandent et déclenchent de nouvelles actions sur l'environnement, physique aussi bien que métaphysique. Pour ne prendre qu'un exemple, celui d'équilibre qui a un sens précis en mathématiques, ainsi que chez Léon Walras lorsqu'il a défini et étudié la notion d'équilibre économique, est devenu polysémique lorsque générations après générations, les économistes s'en sont emparés et l'ont transformé en réalité économique, qui a conduit à temps d'erreurs provoquant chômage et récession.

C'est donc dans le milieu culturel que l'homme s'échappait de la phylogenèse pour entamer l'anthropogenèse, pour se «dénaturer», pour reprendre le titre d'un des très beaux livres de Vercors. Le moyen de ce divorce : l'abstraction de plus en plus dépouillée offerte par le milieu culturel, ce monde dual créé par l'homme et pour l'homme. «L'évolution culturelle continue l'évolution biologique par d'autres moyens» selon la belle formule de Popper et Eccles détournant la célèbre définition de Clausewitz.

À défaut de pouvoir toujours expliquer le monde, d'y déceler des cohérences internes, les hommes ont inventé les mathématiques pour créer un monde logique, harmonieux, cohérent, puisant dans les parties de l'environnement qui s'y prête des motivations, et qualifiant de physique la partie de cet environnement qui s'explique par des métaphores mathématiques.

L'homme pouvait lui aussi créer un nouveau monde, un monde labile et malléable, un monde à sa mesure. Il a ajouté au monde de la métaphysique celui de la physique, car comme tout paradis, le paradis métaphysique, cet opium d'un peuple idéaliste, devait être perdu. Le processus d'abstraction ne consiste pas à obtenir de rigoureuses définitions. Depuis plus de deux mille ans, aucun progrès n'a été accompli dans cette direction. Ce processus d'abstraction ressemble plutôt à une sorte de strip-tease : Il consiste à partir d'un objet ou d'un concept particulier, riche de multiples aspects et propriétés, et à en ôter timidement quelques-unes, avec beaucoup d'hésitations, et souvent de provocations. Avec pour tout résultat la frustration de ne pas pouvoir atteindre ce nu intégral qu'est l'essence convoitée. Mais qui dit «strip-tease» pense à «dévoiler», *à découvrir» une nature [qui] aime être cachée* selon Héraclite. La découverte est littéralement synonyme de «vérité» chez les Grecs présocratiques, l'*alètheia* de Parménide. La vérité avait plutôt le sens d'une concordance, *homoiosis*, d'adéquation entre deux perceptions, de cohérence, et rejoint le concept de validité d'une métaphore. La vérité n'avait donc pas à cette époque la connotation qu'elle a prise de nos jours, où une proposition ou une assertion est «vraie» au sens où elle est conforme à une «vérité» extérieure, supposée exister avant toute expérience humaine. Cette vérité ontologique suppose une adéquation à un idéal, de l'idée platonicienne à celle d'une entité divine. Et tant que la Création est divine, les hommes se contentent de la dévoiler, de la découvrir, de la révérer, d'en interpréter la révélation, se gardant de la troubler par des « inventions » qui ne sont alors considérées que comme des curiosités.

9. Métaphores mathématiques de la réalité

Les mathématiques contribuent à compléter la panoplie de métaphores utilisées pour mieux comprendre le monde dans lequel nous vivons afin de mieux s'y adapter. On peut être surpris de voir ce beau mot de métaphore, sous-entendant poésie et richesse de sentiments et d'émotions, accolé à ce qualificatif mathématique, avec tout ce qu'il sous-entend de sécheresse, d'aridité, de rugueux, de dépouillé, de rigueur, de raison, sans oublier de douloureux souvenirs pour beaucoup.

Car l'univers n'obéit pas à des lois physiques, c'est la physique, création de l'homme pour décrire le monde à l'aide de métaphores mathématiques, qui obéit aux lois qu'elle élabore, pour percevoir des «portions d'environnement», des domaines de validité. Ce sont ces domaines de validité qui sont remis en question lors de chaque révolution scientifique qui permet d'en franchir les frontières pour en créer d'autres. Une fois acceptées par une communauté, ces nouveaux mondes, de plus en plus vastes, deviennent la réalité. En fait, les mathématiques ne décrivent pas l'univers, elles le créent --- en créent en fait une partie --- en le rendant intelligible, à l'aide de métaphores que de nombreux garde-fous expérimentaux rendent crédibles, et dès lors, compréhensibles. Mais la cohérence logique des mathématiques n'implique en rien leur validité pour fournir des métaphores mathématiques.

Dans les systèmes ouverts que l'on retrouve nécessairement dans les systèmes du vivant, il est impossible de vérifier une métaphore, au sens étymologique, car le mot vérifier vient de *verus*, la vérité. Donc vérifier une métaphore reviendrait à démontrer sa vérité. Une métaphore ne peut qu'être validée, c'est à dire acceptée à un moment donné par un groupe social donné. Mais cette validation n'est pas une vérification, et toute vérification prise en un sens plus ou moins large relève de l'abondante catégorie des oxymorons, ces expressions auto-contradictoires qui assaisonnent la fade pour tenter de réconcilier l'inconciliable. La Vérité n'est pas du monde des systèmes ouverts. Rudolph Carnap et ses amis du cercle de Vienne ont recherché avec des efforts méritoires l'existence d'une méthode logique proposant des métaphores pour l'explication des sciences de la nature, efforts maintenant abandonnés. C'est un point de vue proche de celui de l'idonéisme du philosophe proposé par Ferdinand Gonseth qui souligne que «*les catégories du verdict sont ni le vrai, ni le faux de la logique, mais l'idoine ou l'arbitraire*». Il propose «un arbitrage constamment renouvelable entre la connaissance acquise et la connaissance a priori, --- ou entre l'invention et l'intuition».

Plusieurs phénomènes différents peuvent déclencher une même observation, procurant une inconfortable indétermination qui chagrine les épistémologues depuis au moins Pierre Duhem. La cohérence provisoire d'une métaphore n'implique pas qu'elle soit «juste» ou vraie. Seule sa contraposée est significative : si l'observation d'un phénomène n'est plus validée par une métaphore, alors c'est que l'un de ces termes doit être remis en cause. C'est cette remarque qui a motivé la théorie de la réfutation (qui nous est revenu sous la forme de l'horrible «falsification») de Karl Popper. S'il est impossible de démontrer la véracité d'une métaphore, il n'est pas interdit de parier sur le principe de sa réfutation.

C'est à ce moment que les scientifiques bricolent leur théorie et leurs paramètres, comme le système de Ptolémée qui a résisté à toutes les tentatives de validation pendant de nombreux siècles, mais qui fut remise en cause par la révolution copernicienne. Ou alors, bien plus rarement, ils opèrent une révolution scientifique à la Bachelard. Parmi toutes les métaphores, depuis Ockham et son fameux rasoir, on sélectionnera de préférence une métaphore simple à une métaphore compliquée. Cette quête de la simplicité, de la parcimonie --- et d'une bonne économie --- est une caractéristique de l'activité mathématique.

10.Mathématiques Motivées, Pures et Appliquées

Les activités mathématiques sont multiples. Il est pourtant de tradition de les diviser en deux, *mathématiques pures* et les *mathématiques appliquées.* Le terme "mathématiques appliquées" utilisé en opposition à mathématiques pures peut laisser croire qu'il n'existe qu'une seule distinction entre le développement intrinsèque des techniques mathématiques et l'utilisation de ces techniques pour résoudre des problèmes posés dans d'autres disciplines scientifiques. Ce terme cache, en effet, une donnée essentielle du progrès des mathématiques, à savoir la motivation (ou l'inspiration) que les mathématiciens peuvent puiser dans l'étude d'autres sciences (énoncé de nouveaux problèmes mathématiques et nécessité de nouvelles techniques mathématiques). Il faudrait avoir oublié l'histoire des sciences pour ignorer que le désir d'explorer l'environnement a eu sur le progrès des mathématiques l'influence la plus heureuse et la plus constante. Mais cette composante cruciale des mathématiques a eu tendance à être négligée depuis une dogmatisation excessive de cette discipline.

La construction de métaphores mathématiques exige naturellement le développement autonome de la discipline pour fournir des théories destinées à être substituées --- ou associées --- aux phénomènes en attente d'explications. C'est le domaine des mathématiques pures. La construction du corpus mathématique obéit à sa logique propre et à ses contraintes techniques, comme il en est de la littérature, de la musique et de la peinture. Dans tous ces domaines, une satisfaction d'ordre esthétique est à la fois un but de l'activité créatrice et un signal qui permet de reconnaître les oeuvres réussies. «*Il peut être très difficile de définir la beauté mathématique, mais c'est vrai pour la beauté en général, nous ignorons peut-être ce qu'est un beau poème, mais cela ne nous empêche pas de le reconnaître quand nous en lisons un*» écrivait le mathématicien anglais G. Hardy. Ces critères esthétiques évoluent et font d'ailleurs partie du consensus d'un groupe social donné à un moment donné.

Ce n'est pas tout : une métaphore mathématique fait correspondre une théorie mathématique et un autre phénomène. Cette association peut être vue de deux façons : la première, la plus connue, est de chercher dans le corpus mathématique une théorie qui peut correspondre de façon aussi précise que possible à un phénomène donné. Mais cette association ne se fait pas toujours dans ce sens, le mathématicien ne doit pas être pour l'utilisateur un simple pourvoyeur de formules. Les autres disciplines, la physique surtout, ont guidé les mathématiciens dans le choix des problèmes qui se présentent en foule, en les empêchant de tourner sans cesse dans le même cercle, en leur imposant de nouveaux défis, en les encourageant à user d'audace pour remettre en question les idées de leurs prédécesseurs. Ces autres disciplines peuvent à leur tour procurer aux mathématiques des métaphores, en leur suggérant des concepts et des raisonnements, en faisant pressentir des solutions, en matérialisant de nouveaux modes d'intuition : c'est là le domaine des *mathématiques motivées*.

Cette distinction entre ces trois types d'activité mathématique remonte à François Viète (1450-1603), qui subdivise l'analyse en trois parties. A la division proposée par les anciens entre zététique, qui correspond aux mathématiques motivées et poristique, qui correspond aux mathématiques pures, Viète a ajouté l'exégétique ou la rhétique, qui correspond aux mathématiques appliquées.

Il est vain de dessiner des frontières précises entre ces trois types d'activité mathématique, tellement nombreuses sont les interactions entre elles. Peut-être d'ailleurs résident-elles plus dans le comportement intellectuel et créatif des mathématiciens que dans la nature même des problèmes qui doivent être étudiés sous tous leurs aspects.

Tout au plus peut-on considérer qu'un mathématicien travaillant en relation étroite avec des ingénieurs, ou des gestionnaires, ou des médecins, a tendance à faire des mathématiques appliquées, tandis qu'en travaillant avec des théoriciens d'autres disciplines, (physique théorique, économie, sociologie ou biologie, par exemple), il est porté à faire des mathématiques motivées.

La concurrence entre des mathématiciens de plus en plus nombreux et l'exigence qui remonte à la seconde guerre mondiale de productivité à un relatif court-terme, conduisent naturellement à une division plus marquée du travail et à la spécialisation. Prendre du temps et du recul, devient de plus en plus malaisé. En outre, les mathématiciens n'ont pas su résister eux aussi aux lois de la psychologie et de la sociologie, puisque certains se sont ingéniés à transformer cette distinction entre divers comportements intellectuels en une hiérarchie implicite (et hélas, souvent explicite) : les bonnes mathématiques pures et les mauvaises mathématiques appliquées. Cette classification est dangereuse et se perpétue en s'accentuant et en accusant les différences, puisque les jeunes talents ont tendance à se distribuer selon cette hiérarchie.

D'autant qu'elle n'est souvent pas fondée.

Car le temps d'accès à un résultat mathématique en dehors de la spécialité d'un mathématicien est si long qu'il ne peut la plupart du temps se faire lui-même le juge de la qualité de la contribution de ses collègues (originalité par rapport à ce qui précède, difficulté a priori et non a posteriori). Contrairement à ce que l'on peut croire, il doit déléguer son jugement à un spécialiste et lui faire confiance. C'est à cette étape que la subjectivité remplace l'objectivité dont on pare les scientifiques. Les opinions se fondent sur des cascades de rumeurs, positives ou négatives, les images se forment et s'installent pour longtemps. Les étiquettes sont collées d'une glu d'autant plus indélébile que l'on est éloigné de la spécialité (pour la raison toute simple que des révisions éventuelles d'un jugement parviennent moins facilement à des oreilles éloignées). De plus, comme n'est intéressant que ce que l'on connaît intimement, et d'autant plus intéressant qu'on le connaît mieux, toute nouveauté dérange, ou est au mieux considérée comme inutile et au pire comme nuisible.

Des phénomènes de mode --- de consensus social --- contribuent à l'évolution continue de ces critères esthétiques et sociologiques qui permettent à la subjectivité de reprendre le dessus sur l'objectivité. Comme dans d'autres domaines de la science et des arts, l'histoire secrète des idées et la sociologie de la création intellectuelle ignore encore les raisons qui portent certains sujets ou certains savants au pinacle et relèguent les autres dans l'oubli, célèbre les premiers et méprise les seconds. Cette histoire est tellement différente de l'histoire officielle des idées «hagiographique» qui est communément enseignée. Dans son Histoire de la découverte de l'inconscient, Ellenberger cite le docteur Alfred Hoche qui décrivit dans l'article *Eine psychische Epidemie unter Aertzten* publié en 1910 à propos de la psychanalyse le concept d'épidémie psychique. C'est selon lui «la transmission de représentations spécifiques d'une force irrésistible dans un grand nombre de têtes, d'où résulte une perte de jugement et de lucidité. Lorsque la foi l'emporte sur la raison, lorsqu'un manque de sens historique nuit à la réflexion philosophique, se créent alors des écoles de pensée, qui tiennent de la secte, dont Alfred Hoche dresse une liste de traits caractéristiques, parmi lesquels je retiens : la conviction fanatique de sa supériorité sur les autres, l'usage d'un jargon ésotérique, une intolérance aiguë, la tendance à vilipender tous ceux qui ne croient pas comme elle, la profonde vénération pour le Maître, la tendance au prosélytisme, la surestimation fantastique des travaux de ses membres). En mathématiques également, et pendant toute leur histoire, plusieurs écoles de mathématiques remplissent ces critères. Car comme les écrivains, les scientifiques souffrent également d'invidia scientifique, sorte de ressentiment professionnel que Léon Daudet avait détecté les symptômes chez les écrivains et qualifié d'invidia littéraire.

En fait, le progrès scientifique combine dans des proportions diverses deux démarches: avancer profondément dans une direction, ou frayer un nouveau chemin, dont on ne sait pas a priori où il mène. En explorant une direction donnée, on crée une tradition, qui exige des chercheurs beaucoup de virtuosité technique. Les progrès sont facilement évaluables à l'aide de critères bien établis. Cela a la faveur de ceux des mathématiciens qui aiment répondre à des défis légués par d'autres.

La seconde approche, qui relève plus des mathématiques motivées, requiert un nouveau regard, des perspectives neuves, un autre goût du risque. La naïveté de nouveaux venus, qui ne sont pas au courant de «*ce qui ne se fait pas*», peut par inadvertance ouvrir de telles voies, qui ne demandent pas nécessairement de prouesses techniques. C'est la fameuse serendipity anglo-saxonne qui consiste à trouver ce qu'on ne cherche pas. Elle est souvent le fait de jeunes, ce qui explique l'idée quelque peu répandue que le génie mathématique apparaît tôt. Mais pour cela, il faut que ces chemins amorcés débouchent rapidement sur des découvertes qui peuvent être comprises à l'instant même où elles sont faites. Trop tôt ébauchées, ces nouvelles voies ne seront pas reconnues. Elles ne pourront jamais plus être explorées, car le hasard (sans la nécessité) ne frappera pas deux fois.

L'absence de repère consensuel à l'aide desquels évaluer un travail de recherche contribue souvent à attiser le dédain de techniciens chenus confortablement installés dans de solides certitudes. Dans ces jugements de valeur, les mathématiques motivées héritent de l'opinion que se font certains des mathématiques appliquées. Cela est d'autant moins justifié que le travail d'un mathématicien motivé est risqué, surtout lorsque les problèmes viennent de ces sciences injustement qualifiées de molles que sont les sciences sociales humaines et à moindre degré, les sciences biologiques. De très longues heures de réflexion peuvent très bien ne déboucher que sur des évidences mathématiques ou sur des problèmes insolubles à court terme, alors que cet effort consacré à un problème structuré de mathématiques pures ou de mathématiques appliquées pourrait normalement déboucher sur des résultats visibles.

Les sciences du vivant, par exemple, se sont d'ailleurs développées jusqu'ici sans utiliser à grande échelle des mathématiques motivées par les sciences physiques, car il faudra probablement de «nouvelles mathématiques» pour en rendre compte. On peut attendre une sorte de génie mathématique, ignorant tout des mathématiques actuelles et ayant une connaissance intime du fonctionnement de tel ou tel système vivant : ce sont des conditions nécessaires à l'invention de telles mathématiques. A défaut d'un tel messie, il faut se contenter de demander à quelques mathématiciens intéressés par ces nouveaux problèmes de s'écarter autant que faire ce peut du droit chemin lorsque les techniques disponibles ne rendent pas compte de façon adéquate de ces problèmes. Le rôle des «mathématiciens motivés» ne consiste pas seulement à répondre aux questions posées par d'autres, mais doit contribuer à la modélisation de ces problèmes, ce qui est une activité très différente, et qui est loin d'être encouragée.

On croit souvent qu'il suffit que des spécialistes des autres disciplines exposent leurs problèmes à des mathématiciens. Cela est également illusoire car pour ce faire, il faudrait que ces spécialistes connaissent *a priori* les techniques mathématiques susceptibles d'être utiles pour énoncer ces problèmes. Ceci est justement du ressort des mathématiciens «motivés», connaissant bien une autre discipline, ayant à leur disposition un arsenal de techniques mathématiques assez fourni et ayant la capacité d'en créer de nouvelles (nécessairement au voisinage de celles qu'ils connaissent).

Ils doivent, en un dialogue constant, difficile et frustrant, vérifier si le problème posé est susceptible d'être résolu par les techniques qu'ils maîtrisent ou sinon, négocier une déformation de ce problème, une restructuration éventuelle qui conduit souvent à oublier (en apparence) le modèle d'origine, fabriquer une théorie ad hoc dont on pressent qu'elle servira plus tard. Ils doivent convaincre leurs collègues des autres disciplines qu'un temps d'apprentissage et de maturation très long est nécessaire pour saisir le langage d'une théorie donnée, ses fondements et ses principaux résultats, que les énoncés les plus simples, les plus naïfs et les plus attrayants exigent, pour être démontrés, pour être appliqués, des développements qui peuvent durer des dizaines d'années et qui occupent plusieurs ouvrages, qu'en fait, on n'a jamais cessé de comprendre une théorie mathématique.

Lorsque les domaines des connaissances comme les sciences de la vie ou les sciences de l'homme et de la société commencent à motiver des recherches mathématiques, le mathématicien est confronté à de nouveaux écueils : il n'a à sa disposition qu'un arsenal mathématique motivé par des sciences physiques, qu'il a mis beaucoup de temps à maîtriser. Il n'y a aucune raison pour que de tels résultats mathématiques offrent des métaphores pertinentes pour rendre compte de ces phénomènes. Il faudrait donc que ces mathématiciens conçoivent de nouveaux outils mathématiques, et ainsi, se mettre au ban de la communauté mathématique. Non seulement à cause de la nouveauté de tels outils, toujours suspecte en absence de la consécration par l'usage, mais aussi parce qu'au moment de leur genèse, de nouvelles théories sont peu pourvues en résultats et offrent moins de difficultés techniques, suscitant ainsi le mépris des spécialistes.

La difficulté est multipliée par le fait que les cerveaux des mathématiciens ont depuis leur prime jeunesse été longuement «lavés» dans une optique mathématique dictée par les sciences physiques, et qu'il leur faudra éventuellement s'en défaire. Ceci est psychologiquement, il faudrait dire, cognitivement, difficile. Au point où l'on viendrait à rêver qu'il faudrait enfermer de jeunes enfants pourvus de bonnes capacités cognitives de nature mathématique dans un milieu de biologistes ou d'économistes après les avoir mis à l'abri de l'éducation mathématique contemporaine motivée par la physique. C'est alors qu'ils pourraient concevoir des approches de nature mathématique différentes de celles que nous connaissons offrant de meilleures métaphores.

Puisque l'étude des phénomènes physico-chimiques a motivé le développement de techniques mathématiques de plus en plus complexes, il faut s'attendre à ce que l'étude des phénomènes biologiques et sociaux, bien plus complexes que les phénomènes physiques, réclame des techniques mathématiques non seulement fort différentes de celles disponibles aujourd'hui, mais bien plus sophistiquées. Ce qui compliquera encore plus le dialogue avec les spécialistes des sciences biologiques, sociales et humaines, qui seront d'autant plus incités à privilégier le court terme et la simulation au détriment des études qualitatives à long terme.

Au siècle où on ne construit plus ni châteaux ni cathédrales sur plusieurs décennies, mais où quelques années suffisent pour ériger des sièges de banques rivalisant en hauteur, au temps où le négoce a supplanté noblesse et clergé, on conçoit que les vocations de mathématiciens motivés se fassent rares. D'autant que fort souvent les utilisateurs n'ont tout simplement pas conscience de l'utilité des mathématiques pour améliorer des aspects des questions qu'ils traitent. Et lorsqu'ils en sont conscients, l'intersection de leurs centres d'intérêt et des préoccupations des mathématiciens est souvent réduite : les premiers sont intéressés par les impacts immédiats sur leurs problèmes et non par les techniques mathématiques susceptibles d'être utilisées et par leurs liens avec l'ensemble de la construction mathématique (ceux qui ont tenté d'aider leurs enfants à faire leurs devoirs de mathématiques me comprendront !).

Cette attitude se reflète chez les avocats de ce nouveau slogan sur la «professionnalisation de l'enseignement» qui semble prendre la relève de celui sur la «pluridisciplinarité» qui a semé la confusion dans les esprits après 1968. Il vaut mieux dire à ce sujet qu'il y a des activités productives relativement stables dans le temps et d'autres qui ne le sont pas, qui vont donner naissance à des activités que l'on n'imagine pas encore. Si l'on entend par formation professionnelle une formation préparant à une activité stable dans le temps, alors le champ des connaissances est bien délimité, il suffit d'enseigner et d'encourager l'aptitude à l'application et au perfectionnement. Mais l'accélération des progrès techniques rend de moins en moins stables les activités productives. On doit donc encourager de plus en plus l'acquisition de mécanismes d'apprentissage souples, au lieu de la formation d'un corps de connaissances (intellectuelles ou non, d'ailleurs).

11. L'enseignement des Mathématiques

La sensibilisation aux mathématiques motivées devrait passer par l'enseignement de l'histoire des mathématiques, en retraçant les chemins tortueux qui ont mené les concepts jusqu'à nous. De la même façon que l'ontogenèse «récapitulerait» la phylogenèse, le déroulement de l'enseignement des mathématiques devrait autant que faire se peut refléter celui de l'histoire des mathématiques. Qu'il faille raccourcir les étapes et les agencer de façon astucieuse, certes, mais il ne faut surtout pas les supprimer. Notre plaidoyer pour les mathématiques motivées s'accompagne donc d'une plaidoirie pour intégrer un minimum d'histoire des mathématiques dans l'enseignement.

Mais de la même façon que Clemenceau parlait de bloc au sujet de la révolution française car il était impossible de trier les événements positifs de ceux qui ne l'étaient pas, les mathématiques se présentent en blocs de théories, en sortes de quanta, pour reprendre une expression de Jacques-Louis Lions. Pour appliquer un millième d'une théorie, on ne peut échapper à la compréhension des 999 autres millièmes. Ce qui rend la situation encore plus délicate, c'est qu'on ne connaît pas à l'avance quel est ce millième utile.

Il doit exister en outre un seuil minimal incompressible au-dessous duquel les mathématiques cessent d'être «intéressantes», au sens où est intéressant ce que l'on connaît très bien. La pluridisciplinarité ne devrait apparaître que progressivement, autour d'un noyau dur constitué par les mathématiques (ou toute autre discipline), auquel s'arriment et se structurent les autres connaissances. Juxtaposer à un niveau subliminal des connaissances élémentaires des diverses disciplines est non seulement inutile, mais dangereux, puisque ce n'est qu'à partir d'un certain stade de connaissances que l'on est conscient de son ignorance.

Il semble paradoxal qu'un savoir est d'autant plus utile qu'il est abstrait. La raison toute simple est que plus un savoir est abstrait, plus il est universel. Il peut être partagé par de nombreuses personnes tandis qu'une expérience concrète, unique en quelque sorte, n'offre guère d'intérêt collectif.

C'est cette universalité des mathématiques, qui prend ses sources de motivation dans un domaine de la connaissance pour trouver des applications dans d'autres domaines qui ne semblent avoir aucun rapport immédiat qui rendent les mathématiques si fascinantes. Cette universalité est proportionnelle au degré d'abstraction, si je puis m'exprimer ainsi, et ne cesse de progresser avec le temps.

Un savoir plus abstrait devrait donc se transmettre plus largement, mais au prix cependant d'une plus grande difficulté d'acquisition et de maturation, ce qui limite sa diffusion. Il en a résulté une tendance à enseigner des mathématiques de plus en plus pures, à cause de leur caractère universel, avec l'idée sous-jacente qu'il sera bien assez temps d'appliquer ces techniques. Mais trop souvent, ce temps n'arrivera jamais.

A toutes ces contraintes qui différencient les mathématiciens des chercheurs des autres disciplines utilisant les mathématiques, s'ajoute une sorte de constante de temps différente, qui mesure le temps d'accès à une théorie mathématique. On conçoit mieux que la lenteur due au degré d’abstraction des mathématiques et l'aspect ésotérique du travail des mathématiciens puissent exaspérer ou lasser ceux qui attendent d'eux des réponses rapides à leurs problèmes.

Enfin, un résultat mathématique --- au même titre que tout autre savoir --- n'est pas statique, inerte, il vit, au rythme des mathématiciens qui le créent, qui l'utilisent, qui le modifient. Les novateurs les plus importants ont eu non seulement des maîtres et des disciples, mais aussi des contemporains, amicaux ou hostiles, avec ou contre lesquels ils ont confronté leurs travaux. Ces interactions méconnues déclenchent des pensées sous-jacentes, les menant de l'inconscient pour les faire affleurer au niveau de la conscience. Il n'y a pas d'idées vraiment pures et isolées du reste du milieu culturel.

On pourrait pourtant croire que d'avoir été démontré confère un statut de vérité éternelle à un résultat mathématique. Il n'en est rien, et le plus ancien théorème connu, celui attribué à Thalès de Milet, a eu une signification différente dans les jeunes cerveaux qui l'ont assimilé générations après générations depuis près de trois mille ans. Celui de Pythagore a repris une autre vie quand Hilbert en a fait la pierre angulaire de l'analyse fonctionnelle moderne. La connaissance --- et en particulier, la connaissance sur la connaissance --- ne peut être qu'historique, car elle fait appel à tout un système de métaphores qui est daté, et qui évolue avec le temps. Un «morceau» de connaissance interprété avec des métaphores actuelles --- ou mieux, celles d'un groupe social donné --- n'a pas le même sens que celui qu'il avait dans le groupe qui l'a élaboré. Il suffit de lire Viète et Fermat pour s'en convaincre en ce qui concerne les mathématiques. Produit à un moment donné, dans un contexte culturel donné, pour des motivations ou en vue d'applications données, un résultat mathématique échappe à son auteur et son destin dépend de celui de ses consommateurs s'il a la chance d'en trouver. Il devient alors une sorte de «stimulus» pour ces sortes de récepteurs qui l'interprètent dans le contexte de leur époque et de leurs préoccupations, lui donnant un statut sémiotique qui mérite une étude plus approfondie.

12. Évolution des mathématiques

On part d'une nouvelle « *idée* », concept assez vague qui indique une direction nouvelle, d'un nouveau point de vue, d'un nouvel esprit scientifique Tout ceci pour tenter de faire sentir, faute de pouvoir mieux la décrire, la nature des processus cognitifs mis en jeu. Il s'agit de la traduire mathématiquement. Ces traductions sont diverses, évoluent avec le temps, étendent leur champ d'applications et retentissent sur d'autres concepts, qui à leur tour modifient quelque peu le sens, ou l'importance, d'un concept donné. Définitions, énoncés, démonstrations, consensus sur ce qu'est une démonstration, tout cela évolue et n'a de statu qu'au sein de communautés qui d'ailleurs se diversifient de plus en plus.

Une fois traduits et acceptés par une communauté, les recherches et les progrès consistent alors à exploiter la traduction de cette de ces idées, sans trop bouleverser le contexte consensuel d'une communauté donnée. C'est à ce stade que se libère la virtuosité technique pour démontrer de nouveaux résultats dans le cadre instauré. Mais il y a une limite à cette activité, que l'on pourrait qualifier du terme barbare de « *compréhensibilité* »

Quand les hypothèses d'un énoncé se multiplient (ce qui est tout à fait légal sur le plan de la logique), qu'elles deviennent plus difficiles à vérifier que les conclusions qu'elles impliquent, il est clair qu'on arrive à la limite d'utilisation de cette «idée», à un *obstacle épistémologique* cher à Gaston Bachelard. Il est alors grand temps de regarder le problème d'un œil nouveau, d'ouvrir une nouvelle perspective, de faire germer une autre idée, que l'on ne peut s'empêcher de ressentir comme une illumination. Et là commence une nouvelle course. Les premiers résultats obtenus avec la nouvelle idée n'exigent pas de grandes prouesses techniques, les démonstrations sont courtes, séduisantes, performantes. Avec ce qu'il faut de publicité et de propagande, cette nouvelle idée peut alors attirer l'attention d'autres chercheurs, qui, s'engouffrant dans cette nouvelle voie, contribuent à améliorer les techniques, à trouver des résultats plus généraux, plus précis, qui contiennent et par-là, annihilent les résultats de leurs prédécesseurs.

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive de nouveau à la limite de compréhensibilité. Encore faut-il que cette idée arrive à temps. Pas trop tôt, car, si le sujet n'est pas «mûr», c'est-à-dire si trop peu de gens se sont heurtés à cette frontière de compréhensibilité à cet instant, il n'y aura pas de témoins de cet exploit solitaire. Lorsque le temps viendra, les nouveaux venus, qui s'agglutineront nombreux autour de cette frontière, devront à leur tour redécouvrir si besoin est la façon de contourner l'obstacle, la nouvelle direction qui les renverra à l'intérieur du domaine de compréhensibilité. Ce sont ceux-là --- et pas toujours les véritables pionniers --- que la postérité reconnaîtra. Mais parmi eux, les créateurs de génie ressusciteront en quelque sorte leurs précurseurs, puisque, en attirant les projecteurs sur les visions nouvelles, ils les replacent dans leur propre perspective, les coulant dans l'histoire des idées. Newton et Leibniz, on l'a vu, ne pouvaient que ressusciter Fermat. Ils pourront alors être plusieurs à découvrir la solution. C'est à ce moment-là que naîtront les conflits de priorité sans lesquels de nombreuses conversations de couloir des scientifiques perdraient de leur amer piment.

Après un certain temps, les pédagogues prennent la relève des chercheurs. Ils ne vont pas prendre le risque de vider leurs salles de cours en enseignant l'ensemble de chacune des théories développées sous l'égide des idées, ils vont simplement exposer leurs premiers chapitres, s'arrêtant à la frontière de compréhensibilité dessinée par la torpeur des regards de leurs auditeurs : il faut dans ce métier être quelque peu démagogue.

Les ouvrages pédagogiques n'exposent dès lors que les débuts de chaque théorie. Il suffit d'interroger un étudiant de mathématiques qui aura appris consciencieusement le contenu de chacun des manuels de ses cours : comme le paléontologue, il ne verra que des débuts d'évolution, car les queues de théories se morfondent dans les revues reliées des sous-sols des bibliothèques de mathématiques, plus fréquentées par les souris que par les hommes. Il y a bel et bien apparence de discontinuité, et l'étudiant acceptera sans rechigner cette absence de cohérence globale, d'unité profonde de son éducation mathématique. Pourtant, ce n'est que l'héritage d'une histoire continue dont les seuls témoins sont les débuts d'évolutions associées à des idées distinctes.