ENSEMBLES ET IMAGES

1. Introduction

Le traitement et l'analyse d'images peuvent se diviser en un certain nombre d'étapes :

- *L'acquisition des images* qui met en œuvre des processus physiques de formation des images suivis d'une mise en forme pour que ces images puissent être traitées par des systèmes informatiques.
- *Le traitement des images* qui a pour but d'améliorer ces images lorsqu'elles possèdent du bruit ou des défauts.
- *La segmentation des images* qui consiste à construire une image symbolique en générant des régions homogènes selon un critère défini a priori.
- *L'analyse* proprement dite qui consiste à extraire des paramètres ou des fonctions représentatives de l'image ou des régions.

Le traitement, la segmentation et l'analyse d'images utilisent un certain nombre de méthodes mathématiques :

- *Les méthodes linéaires de filtrage et d'analyse*
  - Filtrage : convolution, transformée de Fourier, transformée en ondelettes, …
  - Analyse : analyse multivariée, réseaux de neurones, stéréologie, …
- *Les méthodes non linéaires*
  - Morphologie mathématique : filtrage, granulométrie, ligne de partage des eaux, ensembles aléatoires, …
  - Méthodes syntactiques : démarches sémantiques, grammaire, …

Parmi les méthodes mathématiques citées, *la stéréologie et surtout la morphologie mathématique sont construites à partir de* ***la théorie des ensembles et de la topologie***. Il n'est donc pas inutile de revenir sur ces aspects des mathématiques avant d'aborder les applications en imagerie.

2. Convention d'écriture

2.1 Représentations liées aux ensembles

Pour représenter les différentes entités, liés aux ensembles et à la topologie, on utilise des polices standards Times Roman, Arial ou Symbol. La liste suivante montre les règles adoptées.

- L'*espace de référence*, noté E, est représenté par la lettre majuscule grasse Arial : **E**.
- Les *ensembles* seront représentés par des lettres majuscules grasses en Times Roman : **X** , **Y** ... Par défaut **X** et **Y** sont des sous-ensembles de **E**.
- Les *ensembles fermés*, d'un point de vue topologique, sont représentés par ***F***, les suites de fermés par ($\boldsymbol{F}_{\mathbf{n}}$).
- Les *ensembles ouverts*, d'un point de vue topologique, sont représentés par ***G***.
- Les nombres entiers naturels sont notés **N**, les nombres entiers réels par **R**, les entiers rationnels par **Z**.
- Les *éléments d'un ensemble* sont représentés soit par une lettre grasse minuscule, soit par une lettre majuscule grasse affectée d'un indice dans le cas d'un sous ensemble : **a**, **b**, $\mathbf{X_i}$.
- Les *points* seront représentés par des lettres minuscules : x, y, z.

2.2 Autres représentations

- Les *vecteurs* seront représentés, en dehors des formules, par des minuscules grasses soulignées (pour conserver des attributs de police standard) : **<u>x</u>**
- Les *opérateurs morphologiques*, autres que les opérateurs ensemblistes bien connus, sont représentés par une lettre grecque en gras : **ε**, **δ**, ... Dans le cas général, on utilisera la majuscule **Ψ** de l'alphabet grec.

Ces règles ne correspondent pas obligatoirement à un système normalisé mais présentent l'avantage d'une bonne « portabilité » typographique.

3. Eléments de théorie des ensembles

3.1 Notion primitive

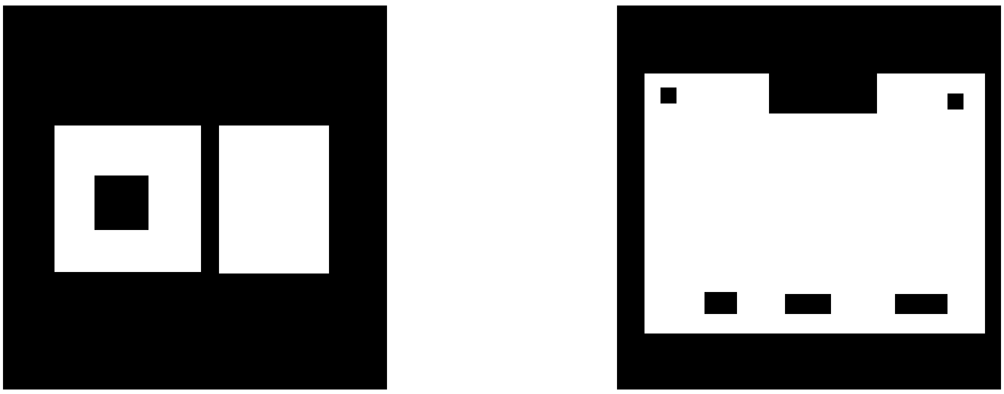
Nous choisissons l'attitude commode de ne pas définir la notion d'ensemble. En effet nous considérerons que *la notion d'ensemble est une notion primitive de la mathématique*, de la même façon que cela se fait en géométrie pour le point, la droite ou le plan.

Les objets qui constituent un ensemble sont appelés éléments de cet ensemble. La relation d'appartenance de l'élément **x** à l'ensemble **X** s'écrit :

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

3.2 Opérateurs ensemblistes de base

Considérons deux ensembles **X** et **Y** (figure 1) appartenant à **E**. Par convention E sera le support de l'image. Les objets appartenant à cet ensemble apparaissent en blanc sur fond noir.



Ensemble **X** Ensemble **Y**

Figure 1

3.2.1 Egalité de deux ensembles

Deux ensembles sont égaux s'ils sont formés des mêmes éléments. Par opposition deux ensembles sont distincts s'il existe au moins un élément de l'un qui n'est pas élément de l'autre.

$$\left[\mathbf{x} \in \mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{Y}\right] \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

3.2.2 *Sous-ensemble et inclusion*

3.2.2.1 Définition de l'inclusion

Nous dirons que **X** est un sous-ensemble de **Y** ou est inclus dans **Y**, si tous les éléments de l'ensemble **X** sont des éléments de l'ensemble **Y** (figure 2). On peut donner la définition de l'inclusion sous la forme suivante :

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \text{ si et seulement si } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{Y}$$

Figure 2

3.2.2.2 Propriétés usuelles de l'inclusion

- L'inclusion est *réflexive* : Tout ensemble **X** est un sous-ensemble de lui-même.

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}$$

- L'inclusion est *transitive* : Soit trois ensembles **X**, **Y** et **Z.**

$$(\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \ \text{ et } \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Z}) \Rightarrow (\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Z})$$

En effet, si **x** est un élément de **X** alors **x** est un élément de **Y**. **Y** étant lui-même un sous ensemble de **Z**, **x** ∈ **Y** entraîne **x** ∈ **Z**. Finalement : **x** ∈ **X** ⇒ **x** ∈ **Z**, ce qui prouve par définition de l'inclusion que **X** est un sous-ensemble de **Z**.

- Deux ensembles **X** et **Y** sont égaux si et seulement si **X** est un sous-ensemble de **Y** et **Y** est un sous-ensemble de **X**. Un dit que l'inclusion est *antisymétrique* :

$$(\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \text{ et } \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}) \Rightarrow (\mathbf{X} = \mathbf{Y})$$

3.2.3 *Intersection de deux ensembles*

3.2.3.1 Définition

Considérons les ensembles **X** et **Y** suivants :

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} \ \text{ et } \mathbf{Y} = \{\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{h}\}$$

Tous les éléments de l'ensemble **Z** = {**b**, **d**} appartiennent à **X** et **Y** ; en outre, ce sont les seuls éléments qui sont communs à **X** et **Y**. On dit que **Z** est l'intersection de **X** et **Y**. D'une façon plus générale, on appelle *intersection des deux ensembles* **X** et **Y**, l'ensemble noté **X** ∩ **Y** des éléments qui appartiennent à la fois à **X** et **Y**. En compréhension l'intersection est définie par :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ et } \mathbf{x} \in \mathbf{Y}\}$$

Ensembles et images

En partant des ensembles présentés sur les figures 3a et 3b, on obtient, sur la figure 3c, le résultat de l'intersection.

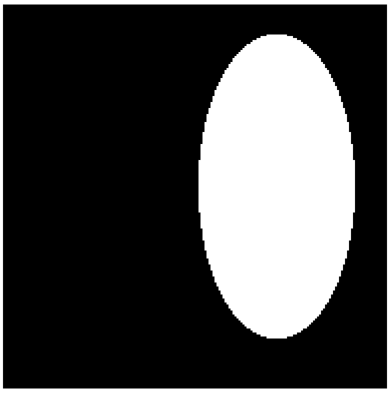


Figure 3a : Ensemble **X**.

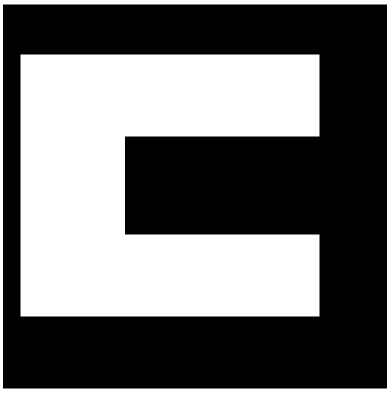


Figure 3b : Ensemble **Y**.

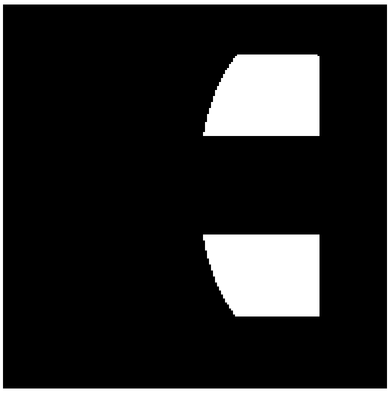


Figure 3c : Ensemble $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$.

3.2.3.2 Propriétés usuelles de l'intersection

- L'intersection est *commutative* :

$$\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cap \mathbf{X}$$

- L'intersection est *associative* :

$$(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \cap \mathbf{Z} = \mathbf{X} \cap (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z})$$

Cette propriété se démontre par la méthode de la double inclusion. On établit successivement que :

$$(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \cap \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X} \cap (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z})$$

$$\mathbf{X} \cap (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}) \subseteq (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \cap \mathbf{Z}$$

- L'intersection est *idempotente*[1] :

$$(\mathbf{X} \cap \mathbf{X}) = \mathbf{X}$$

- Cas de l'ensemble vide ∅. On a toujours :

$$\mathbf{X} \cap \varnothing = \varnothing$$

[1] Voir dernier paragraphe : Autres propriétés algébriques pour les opérateurs ensemblistes

On peut également citer les propriétés suivantes :

$$(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{Y} \quad \text{et} \quad (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{X}$$

$$(\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}) \Rightarrow (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = \mathbf{X}$$

3.2.3.3 Ensembles disjoints et ensembles qui se rencontrent

Supposons que l'ensemble **X** et l'ensemble **Y** ne soient pas vides.

- Les ensembles **X** et **Y** sont *disjoints* si :

$$\left(\forall (\mathbf{X} \neq \varnothing, \mathbf{Y} \neq \varnothing)\right) \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \varnothing$$

- Les ensembles **X** et **Y** se *rencontrent* ou se *touchent* si :

$$\left(\forall (\mathbf{X} \neq \varnothing, \mathbf{Y} \neq \varnothing)\right) \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \varnothing$$

Cette dernière propriété s'écrit également :

$$(\mathbf{X} \Uparrow \mathbf{Y}) = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \varnothing)$$

3.2.4 Réunion de deux ensembles

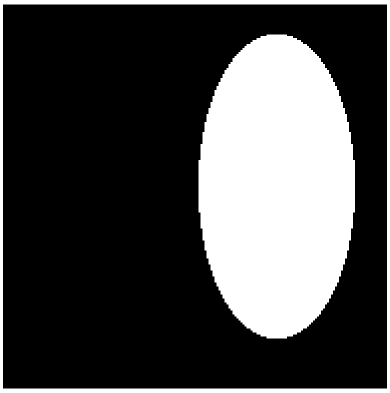


Figure 4a : Ensemble **X**.

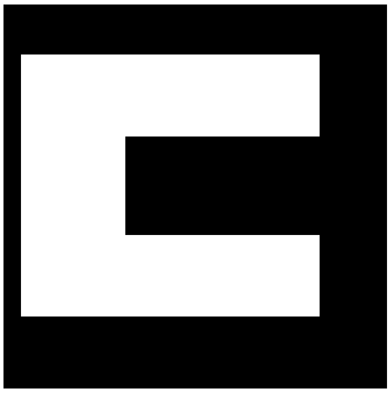


Figure 4b : Ensemble **Y**.

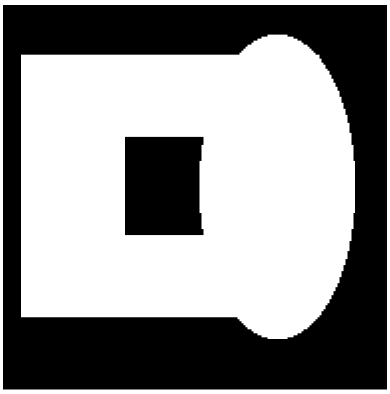


Figure 4c : Ensemble **Z** = **X** ∪ **Y**.

Considérons les ensembles **X** et **Y** suivants :

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \{\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{h}\}$$

Tous les éléments de l'ensemble **Z** = {**a**, **b**, **c**, **d**, **h**} appartiennent à **X** ou à **Y**. On dit que **Z** est *l'union ou la réunion* de **X** et **Y**. D'une façon plus générale, on appelle réunion des deux ensembles **X** et **Y**, l'ensemble noté $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ des éléments qui appartiennent à **X** ou à **Y**. En compréhension l'union est définie par :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} ; \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ ou } \mathbf{x} \in \mathbf{Y}\}$$

En partant des ensembles présentés sur les figures 4a et 4b, on obtient, sur la figure 4c, le résultat de l'union.

3.2.4.1 Propriétés usuelles de la réunion

- La réunion est *commutative* :

$$\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cup \mathbf{X}$$

- La réunion est *associative* :

$$(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \cup \mathbf{Z} = \mathbf{X} \cup (\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z})$$

- La réunion est *idempotente* :

$$(\mathbf{X} \cup \mathbf{X}) = \mathbf{X}$$

- Cas de l'ensemble vide $\varnothing$. On a toujours :

$$(\mathbf{X} \cup \varnothing) = \mathbf{X}$$

On peut également citer les propriétés suivantes :

$$\mathbf{Y} \subseteq (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{X} \subseteq (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$$

$$(\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}) \Rightarrow (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$$

3.2.4.2 Relations entre l'union et l'intersection

Nous avons vu que l'union et l'intersection possèdent des propriétés analogues. Il existe également la propriété de distributivité liant ces deux opérateurs.

- L'intersection *distributive* par rapport à l'union :

$$\mathbf{X} \cap (\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \cup (\mathbf{X} \cap \mathbf{Z})$$

- La réunion est *distributive* par rapport à l'intersection :

$$\mathbf{X} \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X} \cup \mathbf{Z})$$

La démonstration de ces propriétés se fait par la méthode de la double inclusion.

3.2.5 La complémentation

3.2.5.1 Définition

Pour définir la *complémentation d'un ensemble* **X**, il faut le faire par rapport à un autre ensemble contenant **X**. Cet ensemble n'est généralement pas définit au hasard mais va servir de référence pour toutes les opérations que l'on va faire. On a vu qu'on le notait **E**. Par définition, **X** est un sous-ensemble de **E**.

Par définition le complémentaire d'un ensemble **X** par rapport à **E** est l'ensemble des éléments appartenant à **E** mais n'appartenant pas à **X**.

$$\mathsf{C}_{\mathsf{E}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{C}} = \overline{\mathbf{X}} = \{\mathbf{x} ; \mathbf{x} \in \mathsf{E} \text{ et } \mathbf{x} \notin \mathbf{X}\}$$

Ensembles et images

Dans le domaine de l'imagerie, l'ensemble de référence **E** correspond généralement à la totalité du support de l'image. La figure 5 illustre cet opérateur. On remarque que, pour simplifier, on n'explicite pas **E** dans la seconde et troisième notation.

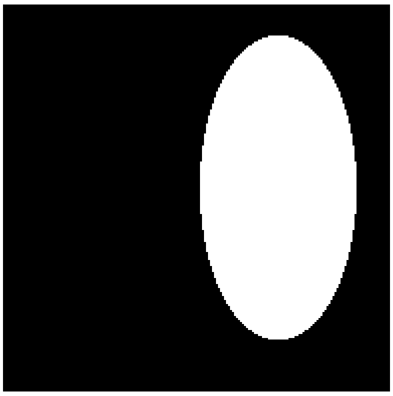


Figure 5a : Ensemble **X**.

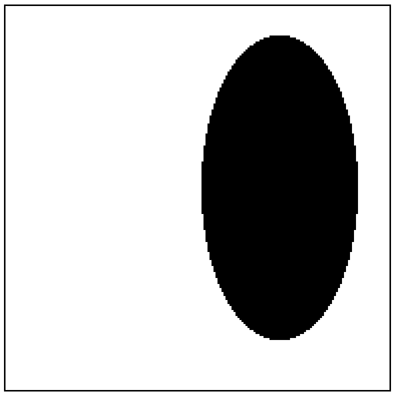


Figure 5b : Ensemble $\mathbf{X}^{\mathbf{C}}$.

3.2.5.2 Propriétés liées à la complémentation

On a effectivement les relations suivantes :

$$\left(\mathbf{X}^{\mathbf{C}}\right)^{\mathbf{C}} = \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} \cap \mathbf{X}^{\mathbf{C}} = \varnothing$$

$$\mathbf{X} \cup \mathbf{X}^{\mathbf{C}} = \mathbf{E}$$

3.2.5.3 Formules de Morgan

Considérons deux ensembles **X** et **Y** ayant même référentiel **E**. Morgan, mathématicien anglais du XIXème siècle a établi des relations qui relient, l'intersection, l'union et la complémentation.

- Le complémentaire de l'intersection des deux ensembles **X** et **Y** est égal à l'union des complémentaires de chaque ensemble.

$$\left(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}\right)^{\mathbf{C}} = \left(\mathbf{X}^{\mathbf{C}}\right) \cup \left(\mathbf{Y}^{\mathbf{C}}\right)$$

- Le complémentaire de l'union des deux ensembles **X** et **Y** est égal à l'intersection des complémentaires de chaque ensemble.

$$\left(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}\right)^{\mathbf{C}} = \left(\mathbf{X}^{\mathbf{C}}\right) \cap \left(\mathbf{Y}^{\mathbf{C}}\right)$$

Démontrons la première des relations. Si **x** appartient au complémentaire de $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, **x** n'appartient pas à $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$. Dire que **x** n'appartient pas simultanément à **X** et **Y** c'est encore dire qu'il n'appartient pas au moins à l'un d'entre eux : $\mathbf{x} \notin \mathbf{X}$ ou $\mathbf{x} \notin \mathbf{Y}$ soit encore $\mathbf{x} \in \mathbf{X}^{\mathbf{C}}$ ou $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}^{\mathbf{C}}$ donc $\mathbf{x} \in (\mathbf{X}^{\mathbf{C}} \cup \mathbf{Y}^{\mathbf{C}})$.

Les formules de Morgan se généralisent à un nombre quelconque d'ensembles.

3.2.6 *La différence de deux ensembles*

3.2.6.1 Définition

La *différence entre deux ensembles* **X** et **Y** est l'ensemble des éléments de **X** qui n'appartiennent pas à **Y** (figure 6). Cela s'écrit :

$$\mathbf{X - Y} = \{\mathbf{x} \,;\, \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ et } \mathbf{x} \notin \mathbf{Y}\}$$

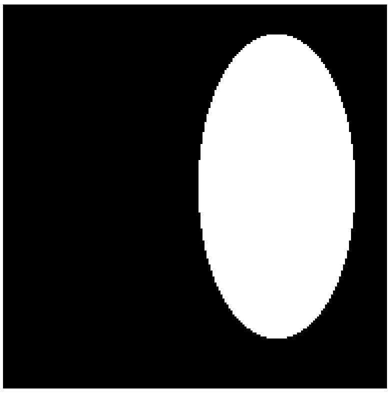


Figure 6a : Ensemble **X**.

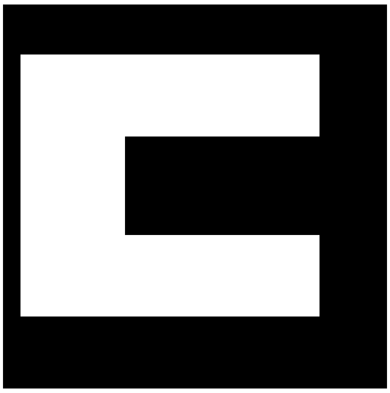


Figure 6b : Ensemble **Y**.

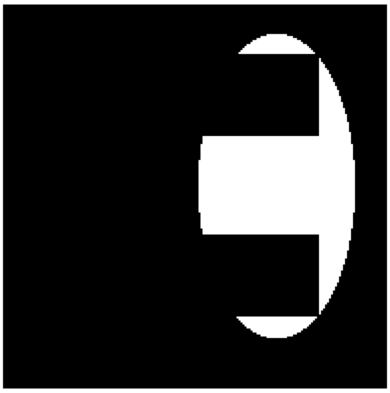


Figure 6c : Ensemble **X – Y**.

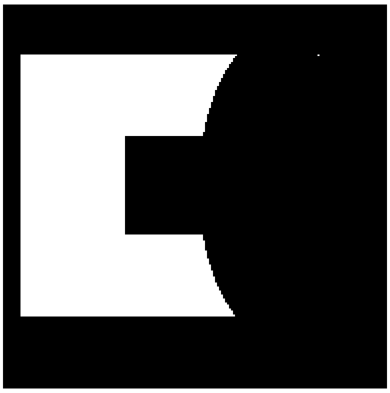


Figure 6d : Ensemble **Y – X**.

La différence entre des ensembles et la différence entre des nombres n'a pas toujours la même signification. La différence dans **Z** possède un élément neutre, zéro. Pour les ensembles, cet élément neutre est l'ensemble vide ∅.

- Soit m et n deux nombres, on a :

$$n - 0 = n$$

$$n - m = 0 \;\Leftrightarrow\; m = n$$

- Pour les ensembles, on a :

$$\mathbf{X} - \varnothing = \mathbf{X}$$

$$(\mathbf{X} - \mathbf{Y} = \varnothing) \Rightarrow (\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y})$$

La différence **X – Y** est toujours un sous-ensemble de **X**. La différence **Y** - **X** n'a donc rien à voir avec **X – Y**, (figures 6c et 6d). On va donc introduire une autre loi de composition : la différence symétrique.

3.2.7 La différence symétrique

3.2.7.1 Définition

La différence symétrique **X / Y**, notée aussi **X Δ Y**, est l'ensemble des points x qui n'appartiennent qu'à **X** ou à **Y**. Elle peut être obtenue en faisant la différence entre l'union et l'intersection des deux ensembles (figure 7). Cela s'écrit :

$$\mathbf{X} / \mathbf{Y} = (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) - (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$$

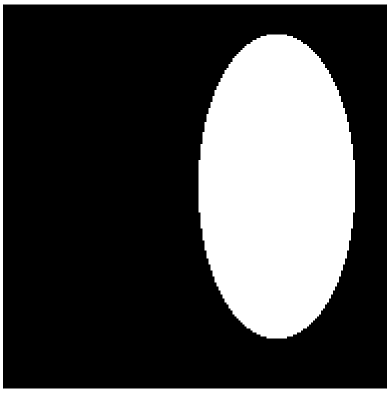


Figure 7a : Ensemble **X**.

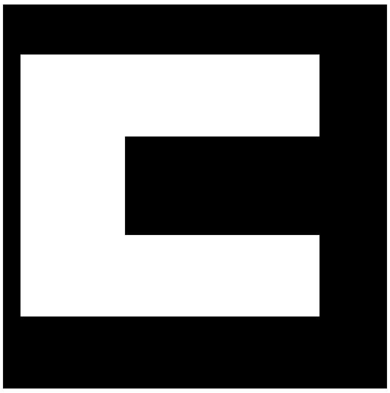


Figure 7b : Ensemble **Y**.

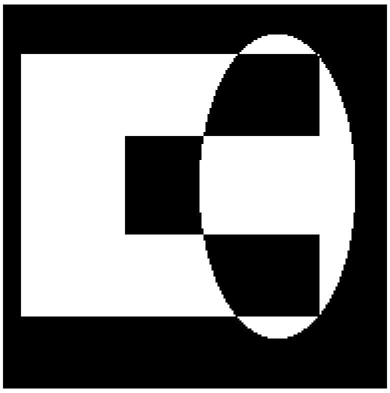


Figure 7c : Ensemble **X / Y**.

3.2.7.2 Propriétés de la différence symétrique

- La différence symétrique est associative :

$$\mathbf{X} / (\mathbf{Y} / \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} / \mathbf{Y}) / \mathbf{Z}$$

- La différence symétrique possède un élément neutre :

$$\mathbf{X} / \varnothing = \mathbf{X}$$

- La différence symétrique est commutative :

$$(\mathbf{Y} / \mathbf{X}) = (\mathbf{X} / \mathbf{Y})$$

Ce n'est pas le cas de la différence simple.

3.3 Relations d'un ensemble vers un autre

3.3.1 Produit cartésien de deux ensembles

Considérons deux ensembles **X** et **Y**. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$: **x** et **y** constituent une paire d'éléments que l'on note « **x**, **y** » mais qui pourrait s'écrire « **y**, **x** ». Pour distinguer les deux possibilités, on introduit la notion de couple (**x**, **y**) en ordonnant les deux éléments. En général, on a (**x**, **y**) ≠ (**y**, **x**). Ainsi deux couples sont égaux si leurs termes éléments correspondants sont égaux :

$$\left((\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{u},\mathbf{v})\right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{x}=\mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}=\mathbf{v}\right)$$

Soit deux ensembles **X = {a**, **b**, **c**, **…}** et **Y** = {**a'**, **b'**, **c'**, **…}**. Considérons tous les couples que nous pouvons former en prenant pour premier terme un élément de **X** et pour second terme, un élément de **Y**. Ces couples forment un nouvel ensemble appelé *produit cartésien des ensembles* **X** et **Y** et noté **Z = (X × Y)**.

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{X}\times\mathbf{Y}) = \left\{(a,a'),(b,b'),(c,c'),(a,b'),(a,c')\ldots\right\}$$

Plus généralement :

$$\mathbf{X}\times\mathbf{F} = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y});\, \mathbf{x}\in\mathbf{X} \text{ et } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\right\}$$

On notera que le produit cartésien n'est pas commutatif.

3.3.2 Relation d'un ensemble vers un autre

La notion de relation d'un ensemble vers un autre est très intéressante car elle intervient dans trois notions fondamentales : les fonctions, les relations binaires sur un ensemble et les applications d'un ensemble dans un autre.

3.3.2.1 Définitions

Etant donné deux ensembles **X** et **Y**, on appelle *graphe ou relation de* **X** *vers* **Y** tout sous-ensemble ***R*** du produit cartésien (**X** × **Y**).

Si ***R*** est une relation de **X** vers **Y**, **X** est appelé la *source* et **Y** le *but* de ***R***. Si (**x**,**y**) ∈ ***R***, **x** est dit *antécédent* de **y** et **y** une *image* de **x** par ***R***. Les deux écritures suivantes sont équivalentes :

$$\left((\mathbf{x},\mathbf{y})\in\boldsymbol{R}\right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{x}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{y}\right)$$

Dans la suite de ce cours, on se limitera aux relations binaires dans un ensemble.

3.3.2.2 Relations binaires dans un ensemble

C'est une relation définie dans (**X** × **X**). Les relations que l'on peut définir peuvent avoir des propriétés particulières.

- Une *relation binaire est dite réflexive*, si pour tout élément de **X**, on a :

$$\mathbf{x}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{x}$$

Par exemple, si **X** = **N**, la relation de parité est réflexive puisque tout entier **x** a même parité que lui-même. Par contre l'élévation au carré n'est pas réflexive.

- Une *relation binaire est dite symétrique*, si elle vérifie :

$$\left(\mathbf{x}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{y}\right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{y}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{x}\right)$$

Par exemple, si **X** = **N**, la relation de parité est symétrique puisque si **x** a même parité que **y**, alors **y** a même parité que **x**. par contre si **y** est le double de **x**, la réciproque n'est généralement pas vraie.

- Une *relation binaire est dite anti-symétrique* si elle vérifie :

$$(\mathbf{x}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{y} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

- Une relation binaire est dite transitive si elle vérifie :

$$(\mathbf{x}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{y} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{z}) \Rightarrow (\mathbf{x}\,\boldsymbol{R}\,\mathbf{z})$$

4. Notions sur les ensembles ordonnés et les treillis

Pour introduire la notion de treillis, il faut, au préalable, définir et présenter de manière élémentaire les ensembles ordonnés.

4.1 Les ensembles ordonnés

4.1.1 Définition

Soit **x**, **y** et **z** trois éléments de l'ensemble **E**. On dit qu'une relation ***R*** sur un ensemble est une relation d'ordre si elle vérifie les trois axiomes suivants :

- Réflexivité : **x *R* x**
- Antisymétrie : **x *R* y**, compatible avec **y *R* x**, si **x** = **y**
- Transitivité : **x *R* y** et **y *R* z** impliquent **x *R* z**

Par exemple, la relation « a ≤ b » est une relation d'ordre qui s'applique aux nombres réels. La relation d'inclusion « **X** ⊆ **Y** » est également une relation d'ordre pour les ensembles. Si **E** est un ensemble muni d'une relation d'ordre ***R*** ; on dira que deux éléments peuvent être comparés si on a au moins une des relations : « **x *R* y** » ou « **y *R* x** ». Si tous les éléments d'un ensemble **E** peuvent être comparés avec la relation ***R***, cet ensemble **E** est un *ensemble totalement ordonné*. Dans le cas contraire, l'ensemble **E** a un *ordre partiel*.

On notera que la relation « a < b » pour les nombres ou « **X** ⊂ **Y** » ne sont pas des relations d'ordre car elles ne sont pas réflexives.

4.1.2 Majorant et plus grand élément

Soit **E** un *ensemble ordonné* et **X** un sous-ensemble de **E**. Un élément **m** de **E** est appelé majorant de **X** si tous les éléments de **X** sont plus petits que **m**. Dans le cas où **m** appartient également à **X**, on dit que **X** admet un plus *grand élément* qui est **m**. On montre que *cet élément est unique*. En effet, soit **m** et **m'** deux majorants de **X** appartenant à **X**. On peut écrire :

$$\left((\mathbf{m'} \in \mathbf{X}) \Rightarrow (\mathbf{m'} < \mathbf{m}) \;\; \text{et} \;\; (\mathbf{m} \in \mathbf{X}) \Rightarrow (\mathbf{m} < \mathbf{m'})\right) \Rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{m'}$$

4.1.3 Borne supérieure

Appelons **M**(**X**) l'ensemble des majorants de **X**. Le majorant le plus intéressant est celui qui sera le plus petit. Soit **s**, cet élément. *Ce plus petit élément est appelé borne supérieure* (notée **sup** ou supremum).

$$\mathbf{s} \in \mathbf{M}(\mathbf{X}) \;\; \text{et} \;\; \mathbf{x} \in \mathbf{M}(\mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{x} > \mathbf{s}$$

Si **s** est la borne supérieure de **X**, en tant que majorant **s** est comparable à tous les éléments de **X** et les suit; en tant que plus petit élément de **M**(**X**), **s** est comparable à tous les majorants et les précède.

La notion de borne supérieure est plus générale que celle de plus grand élément. En effet, si **X** admet une borne supérieure **s**, alors **s** est le plus grand élément de **X** si et seulement si **s** appartient à **X**. La borne supérieure peut exister sans qu'il existe un plus grand élément. Pour les nombres réels **R**, la borne supérieure est + ∞.

Cette borne supérieure est aussi représentée par le symbole ∨(**X**) = **sup**(**X**).

- Exemple

  Soit **E** = {2, 3, 4, 8, 9, 12, 144, 216, 288}et soit **A** = {4, 8, 9, 12} et **C** = {8, 12, 9, 144} deux sous-ensembles de **E**. On ordonne **E** par la *relation de divisibilité*. 144, 216, 288 sont majorants de **A** car tous les éléments de **A** divisent ses trois nombres. **A** est majoré mais ne possède pas de majorant. Par contre le plus grand élément de **C** (144) est un majorant, c'est le plus grand élément.

  Soit **X** définit par **X =** {**x** ∈ **R** ; 0 ≤ **x** < 1}. **X** n'a pas de plus grand élément mais admet 1 pour borne supérieure.

4.1.4 Minorant et borne inférieure

On utilise une démarche similaire pour définir un minorant **m'**. C'est un élément de **E** plus petit que n'importe quel élément de **X**. *Le plus grand des minorants de* **X** *est appelé borne inférieure* (notée **inf** ou infimum).

Cette borne inférieure est aussi représentée par le symbole ∧(**X**) = **inf**(**X**).

4.2 Les treillis

4.2.1 Définition

On appelle treillis tout ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques ont toujours une borne inférieure et une borne supérieure.

Dans le cas des ensembles, l'union de deux éléments correspond à la borne supérieure et l'intersection à la borne inférieure.

5. Ensembles et images

Comment relier aux images, les outils mathématiques que nous venons de présenter ? Avant de résoudre ce problème, il faut définir les images que l'on peut observer. Pour cela nous allons suivre une démarche intuitive en prenant comme exemple une photographie dite « en noir et blanc ». L'exemple photographique sera facilement généralisé.

5.1 Caractéristiques des images photographiques

On distingue 2 types de photographie :

- Les photographies en teintes de gris, appelées « noir et blanc »
- Les photographies en couleur

5.1.1 Photographie en teintes de gris

La figure 8 est un exemple de photographie « en noir et blanc ». Le terme « noir et blanc » est choisi par opposition à une photographie en couleur. En réalité, la figure 8 représente une *image en teintes de gris (niveaux de gris)* tirée d'une photographie.

L'image photographique se situe dans un plan. Elle est généralement carrée ou rectangulaire. Ce carré ou ce rectangle définissent *le support de l'image* appartenant à l'espace $\mathbf{R^2}$. Le *support est caractérisé par sa taille* et chaque point **x** de l'image est repérée par ses coordonnées (u,v). A chaque point de l'image on associe une teinte de gris (f(**x**)). Cette teinte appartient à une échelle qui part d'une valeur nulle pour le noir (f(**x**) = 0) et atteint une valeur M (f(**x**) = M) pour le blanc parfait. Cette échelle appartient à l'espace **R**. Ces définitions et ces caractéristiques sont indépendantes de toute numérisation[2]. La valeur de la fonction f(**x**) s'appelle *valeur radiométrique*.

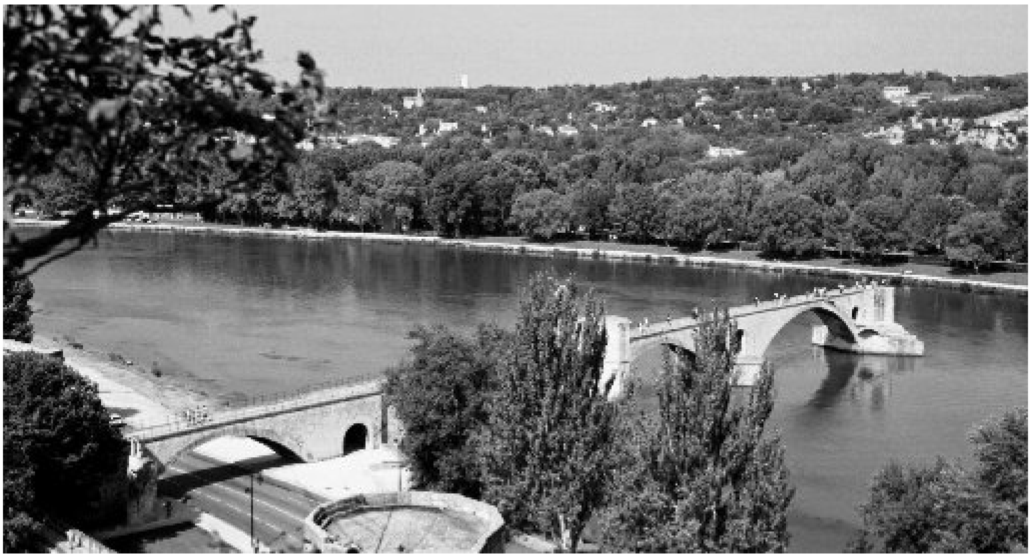


Figure 8 : Le pont d'Avignon.

5.1.2 Photographie « au trait » en noir et blanc

La photographie en noir et blanc véritable se réduit à deux niveaux : le noir de valeur 0 et le blanc de valeur M. C'est ce type d'image que nous avons utilisé pour illustrer les opérateurs ensemblistes. Par convention, un point blanc est un élément de **X** et un point noir, un élément de $\mathbf{X}^{\mathbf{C}}$. Le *support de l'image* sera habituellement noté **Z**. La figure 9 correspond à une représentation « noir et blanc » de l'image en niveaux de gris de la figure 8.

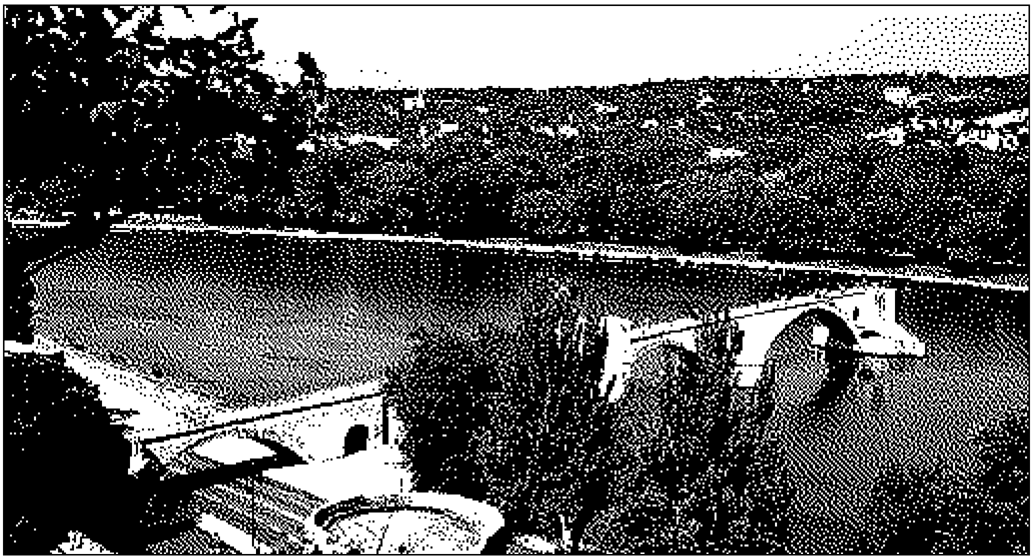


Figure 9 : Le pont d'Avignon en noir et blanc.

[2] Voir le chapitre consacré au passage de l'espace continu à l'espace discret.

5.1.3 *Photographie en couleur ou multimodes*

5.1.3.1 Les images en couleurs

La notion de couleur sort du cadre de ce cours. Disons simplement qu'une image couleur peut être construite vectoriellement à partir de 3 images en niveaux de gris. On sera donc ramener au premier type d'image.

Il existe plusieurs représentations de l'espace couleur. Le plus connu en informatique est l'espace RVB. Les trois images « en niveaux de gris » sont associées respectivement aux canaux Rouge, Vert et Bleu.

5.1.3.2 Les images multimodes

Les images multimodes sont des images qui sont issues d'une même zone mais qui correspondent à des signaux différents. Ce type d'image se rencontre plusieurs domaines scientifiques :

- En *microscopie* avec le microscope électronique à balayage qui peut fournir plusieurs signaux d'un point de l'objet observé (image d'électrons secondaires, image d'électrons rétrodiffusés, cartographie X associée à chaque élément chimique …).
- Dans le *domaine biomédical* (image X associée à une image PET …)
- Dans le domaine spatial avec les vues prises à partir de satellites comme SPOT.

Ces images multimodes peuvent être traitées et analysées comme les images en couleurs.

5.2 Interprétation ensembliste d'une image en teintes de gris

Si l'interprétation, en termes d'ensembles, d'une image en noir et blanc ne pose pas de difficulté, il n'en est pas de même pour une image en teinte de gris.

Comme nous l'avons vu, une image en teinte de gris est une fonction f(**x**) définie sur un support appartenant à l'espace $\mathbf{R}^n$, ($\mathbf{R}^2$, dans le cas photographique). Il faut trouver un concept mathématique pour passer de la notion de *fonction à un ensemble*.

Pour introduire ce concept mathématique nous allons raisonner sur un signal défini dans l'espace $\mathbf{R}^1$. A un point **x** de cet espace, muni d'un repère, est associé une abscisse u. La fonction f(u) représente ce signal. Le graphe de ce signal se trace dans un espace $\mathbf{R}^2$, où les abscisses u sont associées à la position spatiale et les ordonnées f(u) à la valeur radiométrique. Ceci est illustré par la figure 10.

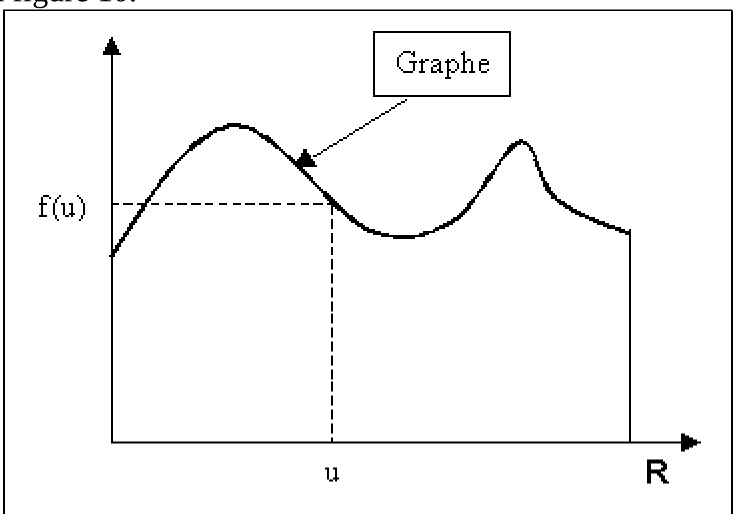


Figure 10 : Graphe d'une fonction définie dans $\mathbf{R}^1$.

5.2.1 Ombre d'une fonction

A ce graphe f(u), on va associer *un sous-graphe* ou plus exactement *l'ombre de la fonction* f(u) définie de la manière suivante. Dans l'espace $\mathbf{R}^2$ défini par l'ordonnée et l'abscisse on va considérer l'ensemble des points **p** qui se situent sous le graphe. Soit **U**(f(u)) cet ensemble définissant l'ombre de la fonction. On aura :

$$\mathbf{U}\big(f(u)\big) = \big\{\mathbf{p}(u,v) : v \leq f(u)\big\}$$

Par l'intermédiaire de l'ombre **U**, on passe d'une fonction à un ensemble. Cette ombre est définie de manière univoque. De la même manière, on peut donner une représentation ensembliste **G** du graphe avec l'expression :

$$\mathbf{G}\big(f(u)\big) = \big\{\mathbf{p}(u,v) : v = f(u)\big\}$$

On notera que pour un signal, il n'existe qu'une valeur f(u) associée à u. La figure 11 donne une représentation de l'ombre. Elle ne se limite pas à l'axe des abscisses mais tend vers $-\infty$. Le même raisonnement peut être fait sur les images qui ont un support défini dans $\mathbf{R}^2$, (figure 12). L'ombre de la fonction f(u,v) sera alors définie dans $\mathbf{R}^3$.

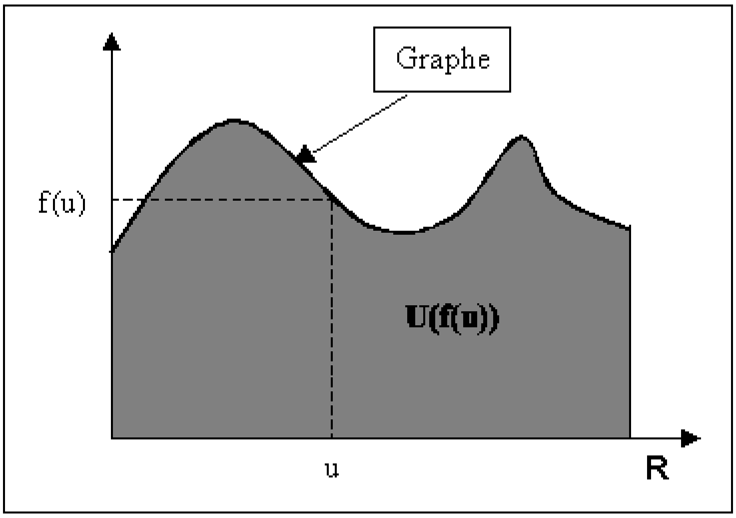
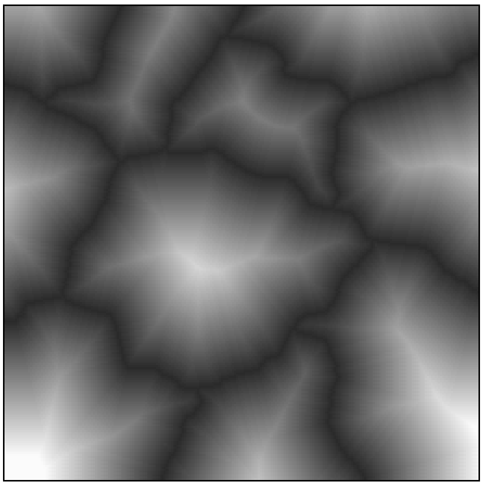


Figure 11 : Ombre d'une fonction.



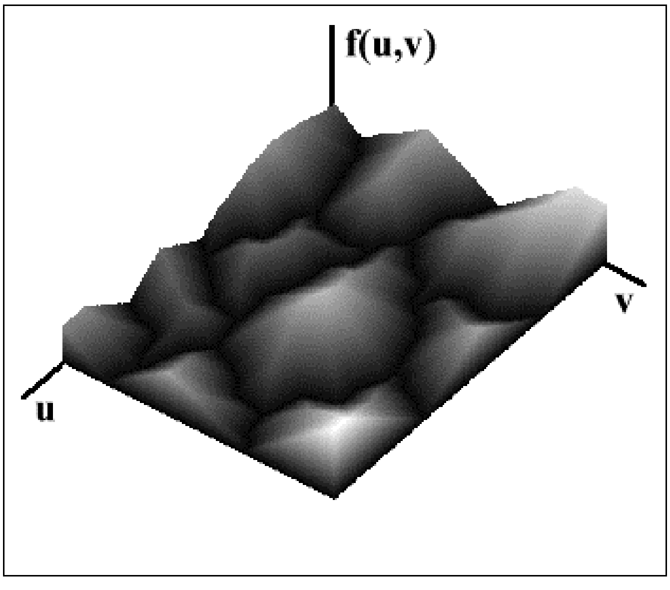


Figure 12 : Image en niveaux de gris et sa représentation en perspective.

La figure 13 illustre la notion de graphe et d'ombre de la fonction f(u,v).

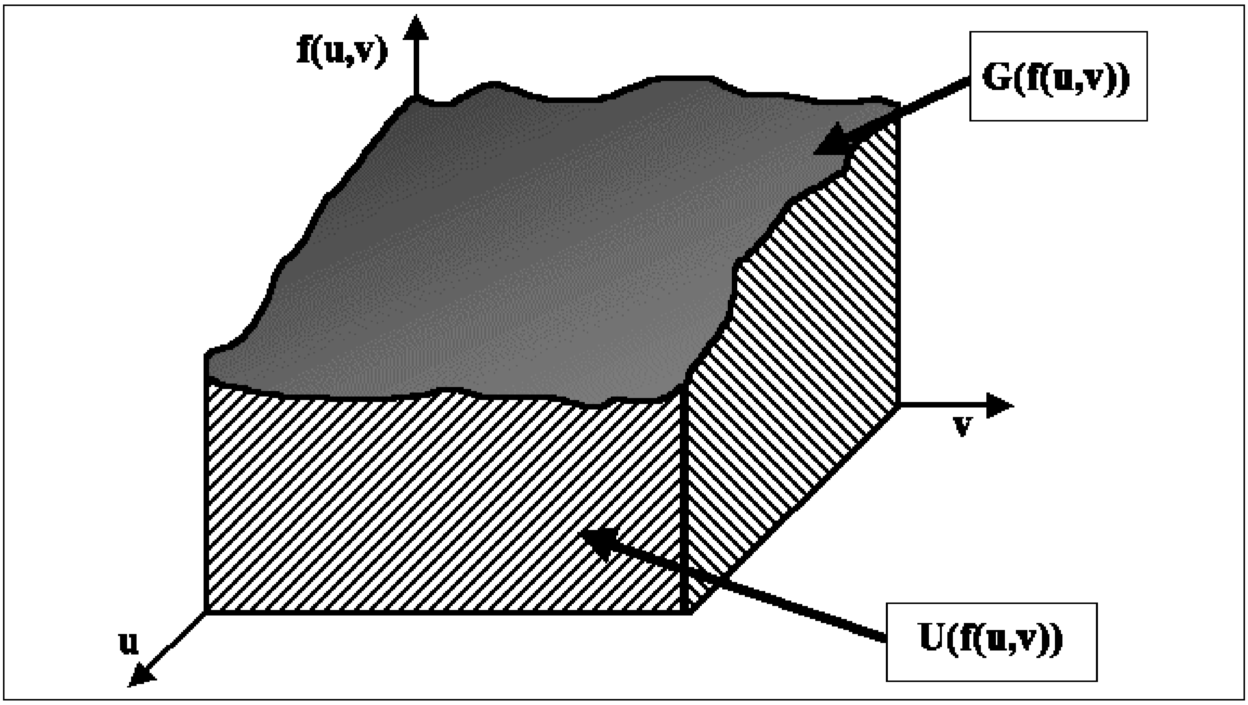


Figure 13 : Graphe et ombre d'une fonction.

5.2.2 L'image en niveaux de gris comparable à un relief topographique

Pour résumer, l'introduction de l'ombre d'une fonction permet de passer à une description totalement ensembliste d'une image en niveaux de gris. Ce mode de représentation permet également de *considérer l'image en niveaux de gris comme un relief.* Ceci est bien perceptible sur la vue en perspective de l'image de la figure 12.

Les zones les plus claires de l'image sont représentées par des sommets ou des crêtes. Les parties les plus sombres sont assimilables à des vallées et des cuvettes. Cette description topographique nous permet d'introduire naturellement des concepts comme la ligne de partage des eaux ou les bassins versants, outils morphologiques bien connus.

6. Autres propriétés algébriques pour les opérateurs ensemblistes

6.1 Définitions

En dehors des propriétés de base que nous avons déjà définies, il en existe d'autres qui nous seront très utiles, en particulier en morphologie mathématique.

On peut citer :

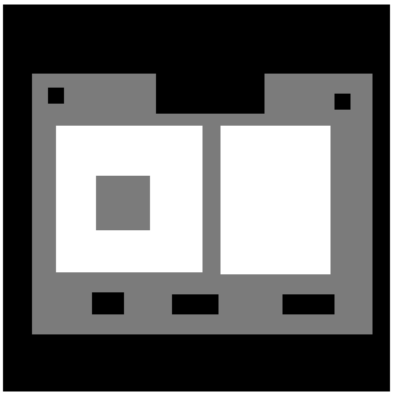
- La propriété de croissance
- La propriété d'extensivité ou d'anti-extensivité
- La propriété d'idempotence déjà vue.

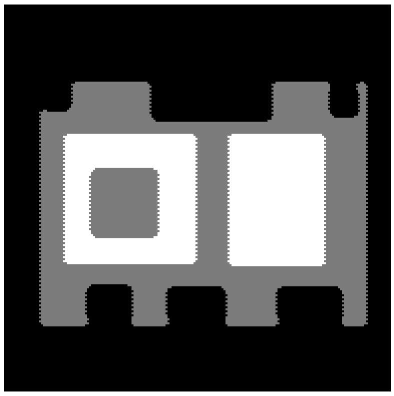
6.1.1 Propriété de croissance

Soit deux ensembles **X** et **Y** tels que **X** soit inclus dans **Y**, on dit que la transformation Ψ vérifie la propriété de croissance si $\Psi(\mathbf{X})$ est inclus dans $\Psi(\mathbf{Y})$. Cela s'écrit :

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \Rightarrow \Psi(\mathbf{X}) \subseteq \Psi(\mathbf{Y})$$

Cette propriété est illustrée par la figure 14.





= **Y** = **X** = Ψ(**Y**) = Ψ(**X**)

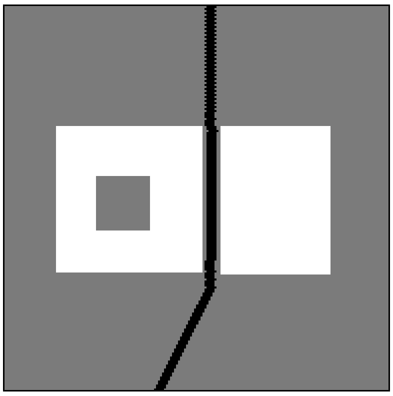
Figure 14 : illustration de la propriété de croissance.

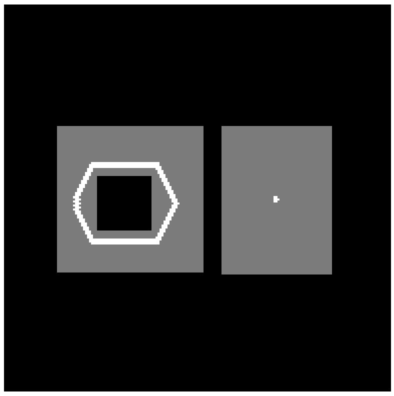
6.1.2 *Propriété d'extensivité ou d'anti-extensivité*

Les propriétés d'extensivité et d'anti-extensivité correspondent à des comparaisons entre l'ensemble de départ et l'ensemble après la transformation Ψ. Si Ψ(**X**) est inclus dans **X**, on dit que la transformation est anti-extensive. Si, au contraire c'est **X** qui est inclus dans Ψ(**X**), alors la transformation est extensive.

- Propriété d'extensivité : $\mathbf{X} \subset \Psi(\mathbf{X})$
- Propriétés d'anti-extensivité : $\Psi(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$

La figure 15 illustre ces deux propriétés.





= Ψ(**X**) = **X** = **X** = Ψ(**X**)

Figure 15a : Illustration de l'extensivité. Figure 15b : Illustration de l'anti-extensivité.

6.1.3 *Propriété d'idempotence*

L'idempotence est encore une propriété de comparaison. On dit qu'une transformation est idempotente si, après avoir appliqué une transformation Ψ(**X**), une nouvelle application de cette transformation ne modifie pas le résultat.

$$\Psi\left(\Psi\left(\mathbf{X}\right)\right) = \Psi\left(\mathbf{X}\right)$$

Nous avons vu que l'union et l'intersection vérifiaient cette propriété. Il est intéressant de voir comment les opérateurs de base se comportent vis à vis de la croissance.

6.2 Comportement des opérateurs ensemblistes pour la croissance

Pour mettre en œuvre ces opérateurs, il faut deux ensembles **X** et **Y**. Supposons maintenant que l'on ait d'une part **X** et $\mathbf{Y_1}$ et d'autre part **X** et $\mathbf{Y_2}$ avec la relation entre $\mathbf{Y_1}$ et $\mathbf{Y_2}$ suivante :

$$\mathbf{Y_1} \subset \mathbf{Y_2}$$

6.2.1 Comportement de l'intersection

Illustrons ce comportement par un exemple. Posons :

- **X** = {**a, b, c, d, e, f, g, A, B, C, D, E, F, G**}
- $\mathbf{Y_1}$= ensemble des consonnes majuscules contenant au moins un trou
- $\mathbf{Y_2}$= ensemble des consonnes majuscules

On a bien : $\mathbf{Y_1} \subset \mathbf{Y_2}$ et on obtient :

- $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y_1}$ = {**A, B, D**}
- $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y_2}$ = {**A, B, C, D, E, F, G**}

Ce qui vérifie :

$$\mathbf{Y_1} \subseteq \mathbf{Y_2} \Rightarrow (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y_1}) \subseteq (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y_2})$$

L'intersection vérifie donc la propriété de croissance. On peut encore visualiser cette propriété sur les figures 16 et 17.

6.2.2 Comportement de l'union

Avec les mêmes ensembles de départ, on vérifie également que :

$$\mathbf{Y_1} \subset \mathbf{Y_2} \Rightarrow (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y_1}) \subset (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y_2})$$

L'union vérifie la propriété de croissance. On peut encore visualiser cette propriété sur les figures 16 et 18.

6.2.3 Comportement de la différence symétrique

Illustrons ce comportement encore par un exemple sur l'alphabet majuscule. Posons :

- **X** = {**A, C, F, J, M**}
- $\mathbf{Y_1}$= {**B, C, D, I, J, K**}
- $\mathbf{Y_2}$= {**B, C, D, E, F, I, J, K, L, M**}

On a bien : $\mathbf{Y_1} \subset \mathbf{Y_2}$

On obtient :

- $\mathbf{X} / \mathbf{Y_1}$ = {**A, B, D, F, I, K, M**}
- $\mathbf{X} / \mathbf{Y_2}$ = {**A, D, E, I, K, L**}

On remarque que la propriété de croissance n'est pas vérifiée puisque :

$$\mathbf{Y_1} \subset \mathbf{Y_2} \Rightarrow (\mathbf{X} / \mathbf{Y_1}) \not\subset (\mathbf{X} / \mathbf{Y_2}) \text{ ni } (\mathbf{X} / \mathbf{Y_2}) \not\subset (\mathbf{X} / \mathbf{Y_1})$$

On peut encore visualiser sur les figures 16 et 19 que la différence symétrique ne vérifie pas la propriété de croissance.

6.2.4 Comportement de la complémentation

On aura toujours ;

$$\mathbf{Y_1} \subset \mathbf{Y_2} \Rightarrow \mathbf{Y_2^C} \subset \mathbf{Y_1^C}$$

Ceci définit *une propriété de décroissance.*

Figure 16a : ensemble $\mathbf{Y_1}$.

Figure 16b : ensemble $\mathbf{Y_2}$.

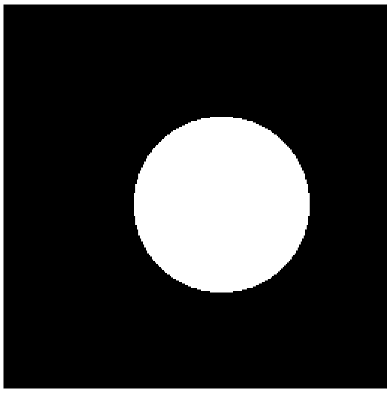


Figure 16c : ensemble $\mathbf{X}$.

Figure 17a : $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y_1}$.

Figure 17b : $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y_2}$.

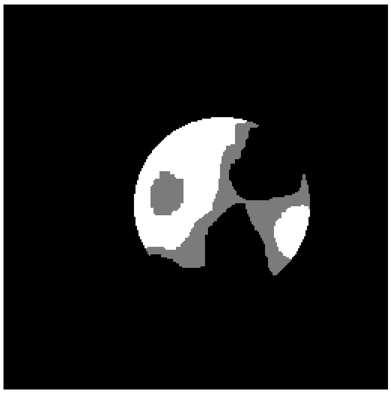


Figure 17c = 17a + 17b.

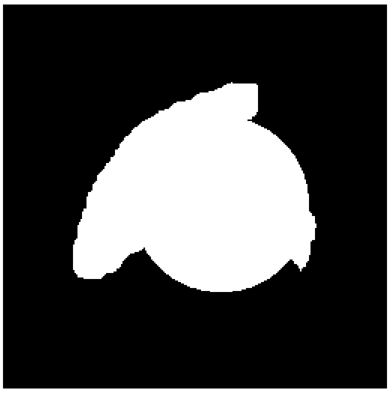


Figure 18a : $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y_1}$.

Figure 18a : $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y_2}$.

Figure 18c = 18a + 18b.

Légende des figures c. $= \mathbf{X}\ \Psi\ \mathbf{Y_2}$ $= \mathbf{X}\ \Psi\ \mathbf{Y_1}$

Figure 16a : ensemble $\mathbf{Y_1}$.

Figure 16b : ensemble $\mathbf{Y_2}$.

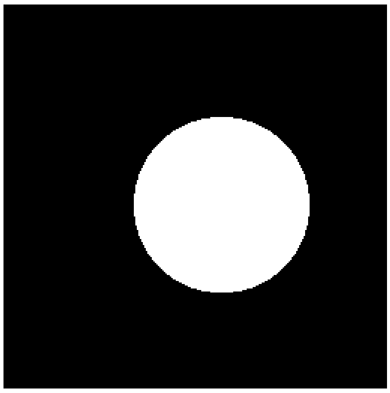


Figure 16c : ensemble **X**.

Figure 19a : $\mathbf{X} / \mathbf{Y_1}$.

Figure 19b : $\mathbf{X} / \mathbf{Y_2}$.

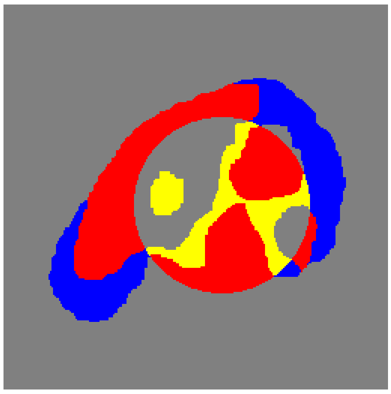


Figure 19c = 19a + 19b.

Légende de la figure 19c : ■ = commun à 19 a et b, ■ = 19a seul, ■ = 19b seul

7. Algèbre de Minkowski

Minkowski[3] est un mathématicien allemand qui au début du XX^{ème} siècle a proposé de nouveaux opérateurs ensemblistes qui serviront de base à la morphologie mathématique, plus de 60 ans plus tard. En plus des opérateurs classiques, comme l'union et l'intersection, les opérateurs proposés par Minkowski dépendent de l'*opérateur de translation d'un ensemble*. Pour réaliser ce type d'opération, l'ensemble de référence doit être un *espace métrique muni d'une origine*.

7.1 Espace métrique

Rappelons qu'un espace $\mathbf{E}$ est un ensemble de points. Cet espace devient un espace métrique s'il est muni d'une distance d.

On appelle *distance* sur $\mathbf{E}$ toute application d de $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant les axiomes suivants :

- $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{E}^2 \quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{E}^2 \quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$ (axiome de symétrie)
- $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{E}^2 \quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})$ (inégalité triangulaire)

[3] MINKOWSKI H. "Volumen und Oberfläche" *Math. Ann.* 1903, 57, 447-495.

Pour la suite, on se limitera au plan Π, sachant que cela peut être étendu à un espace de dimension quelconque.

7.2 Translation d'un ensemble

Pour un ensemble donné **Y**, défini dans un espace métrique muni d'une origine, *la translation d'un ensemble* **Y** *par un point* **x** est définie par :

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Y} + \mathbf{x}) = \{\mathbf{y} + \vec{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$$

Le signe +, dans le terme ensembliste de droite est relatif à une addition vectorielle. En effet, le point **x** permet de définir dans l'espace métrique un vecteur $\overrightarrow{Ox} = \vec{\mathbf{x}}$. Ceci est illustré par la figure 20.

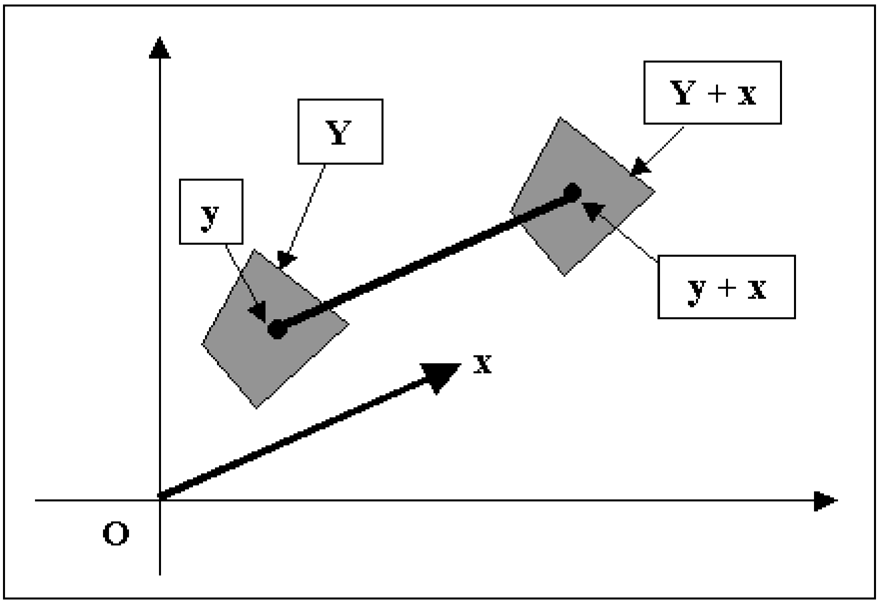


Figure 20 : Translation d'un ensemble par le vecteur $\vec{\mathbf{x}}$

Deux opérateurs fondamentaux sont construits à partir de l'opérateur de translation. Il s'agit de :

- L'addition de Minkowski
- La soustraction de Minkowski

7.3 L'addition de Minkowski

7.3.1 Définition

Soient un ensemble **X** et un ensemble **B**, définis l'espace $\mathbf{R}^2$ (on peut généraliser à $\mathbf{R}^n$). On définit *l'addition de Minkowski* par l'expression :

$$\mathbf{X} \oplus \mathbf{B} = \bigcup_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}} \mathbf{A} + \mathbf{b}$$

L'addition de Minkowski est construite en translatant **X** par chaque élément **b** de **B** et en prenant l'union du résultat des translations. La figure 21 illustre l'addition de Minkowski dans le cas simple où **X** est un disque et **B** un triplet de points.

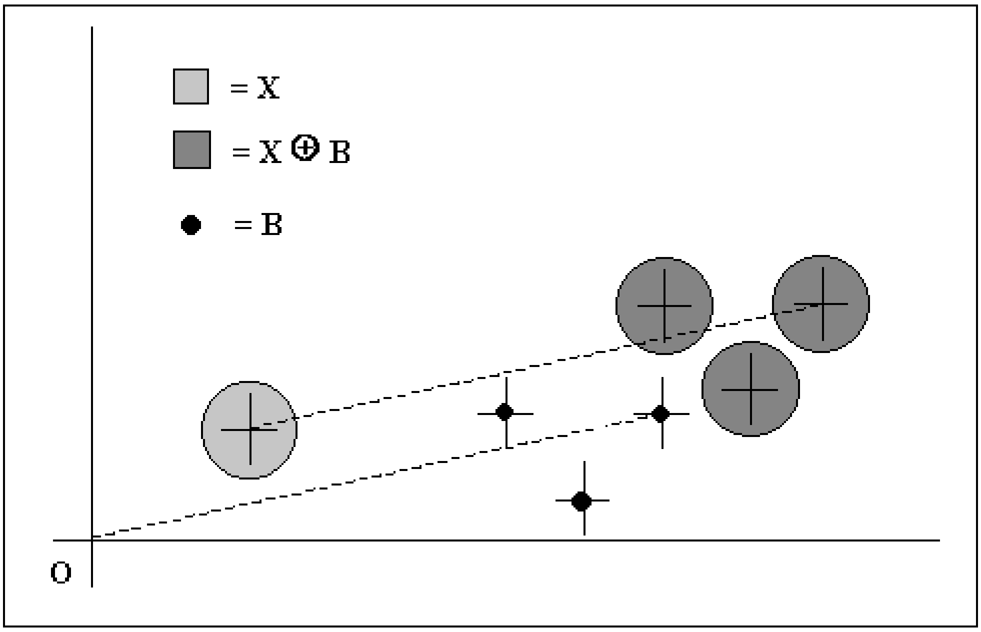


Figure 21 : L'addition de Minkowski.

7.3.2 Propriétés

On peut, dès maintenant, donner deux propriétés de l'addition de Minkowski.

- Si **B** = **x** (**B** réduit à un point), on a uniquement translation de **X** : $\mathbf{X} \oplus \{\mathbf{x}\} = \mathbf{X} + \mathbf{x}$
- Si **B** = **o** (**B** réduit à l'origine de l'espace), on a : $\mathbf{X} \oplus \{\mathbf{o}\} = \mathbf{X}$

Les autres propriétés de l'addition de Minkowski se déduisent des propriétés de l'union.

- L'addition de Minkowski est commutative : $\mathbf{X} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{X}$
- L'addition de Minkowski est associative : $\mathbf{X} \oplus (\mathbf{Y} \oplus \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}) \oplus \mathbf{Z}$
- L'addition de Minkowski est invariante par translation : $\mathbf{X} \oplus (\mathbf{B} + \mathbf{x}) = (\mathbf{X} \oplus \mathbf{B}) + \mathbf{x}$
- L'addition de Minkowski est croissante : $(\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}) \Rightarrow ((\mathbf{X} \oplus \mathbf{B}) \subseteq (\mathbf{Y} \oplus \mathbf{B}))$

7.4 Soustraction de Minkowski

7.4.1 Définition

Soient un ensemble **X** et un ensemble **B**, définis l'espace $\mathbf{R}^2$ (on peut généraliser à $\mathbf{R}^n$). On définit *la soustraction de Minkowski* par l'expression :

$$\mathbf{X} \ominus \mathbf{B} = \bigcap_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}} \mathbf{A} + \mathbf{b}$$

La soustraction de Minkowski est construite en translatant **X** par chaque élément **b** de **B** et en prenant l'intersection du résultat des translations. La figure 22 illustre la soustraction de Minkowski dans le cas simple où **X** est un disque et **B** un triplet de points.

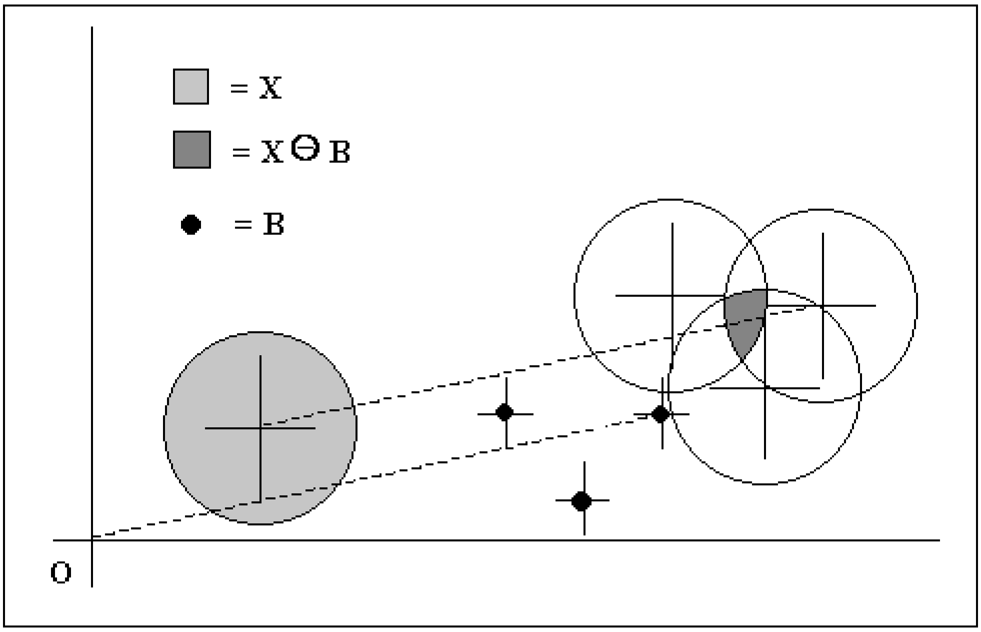


Figure 22 : Soustraction de Minkowski

7.4.2 Propriétés

On peut, dès maintenant, donner deux propriétés de la soustraction de Minkowski.

- Si **B** = **x** (**B** réduit à un point), on a uniquement translation de **X** : $\mathbf{X}\ominus\{\mathbf{x}\} = \mathbf{X}+\mathbf{x}$
- Si **B** = **o** (**B** réduit à l'origine de l'espace), on a : $\mathbf{X}\ominus\{\mathbf{o}\} = \mathbf{X}$

Les autres propriétés sont les suivantes.

- La soustraction de Minkowski n'est pas commutative : $\mathbf{X}\ominus\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\ominus\mathbf{X}$
- La soustraction de Minkowski est invariante par translation[4] :

$$\mathbf{X}\ominus(\mathbf{B}+\mathbf{x}) = (\mathbf{X}+\mathbf{x})\ominus\mathbf{B} = (\mathbf{X}\ominus\mathbf{B})+\mathbf{x}$$

- La soustraction de Minkowski est croissante : $(\mathbf{X}\subseteq\mathbf{Y})\Rightarrow((\mathbf{X}\ominus\mathbf{B})\subseteq(\mathbf{Y}\ominus\mathbf{B}))$

8. Les ensemble convexes

La notion de convexité est très importante en analyse d'images car les ensembles convexes possèdent des propriétés particulières. Commençons par définir un ensemble convexe.

8.1 Définition d'un ensemble convexe

Soit **X** une composante connexe et $[\mathbf{x_1}\text{-}\mathbf{x_2}]$ un segment droit limité par les points $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$, **X** est convexe si :

$$\forall\ \mathbf{x_1} \text{ et } \mathbf{x_2} \in \mathbf{X},\quad \exists[\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}]\subset\mathbf{X}$$

Ceci est illustré par la figure 23 pour l'ensemble convexe. La figure 24 montre le cas d'un ensemble non convexe.

[4] Il faut deux égalités pour faire la démonstration.

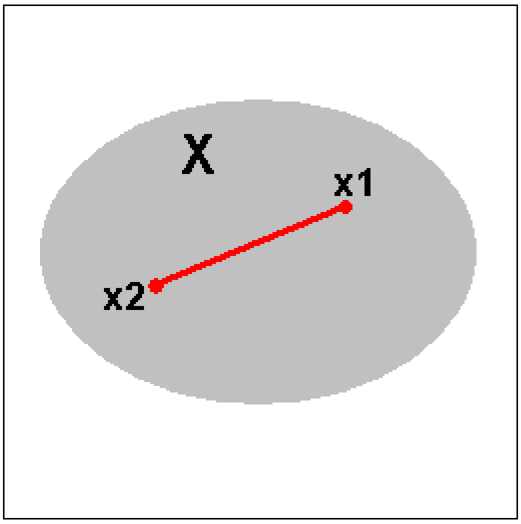


Figure 23 : Ensemble convexe.

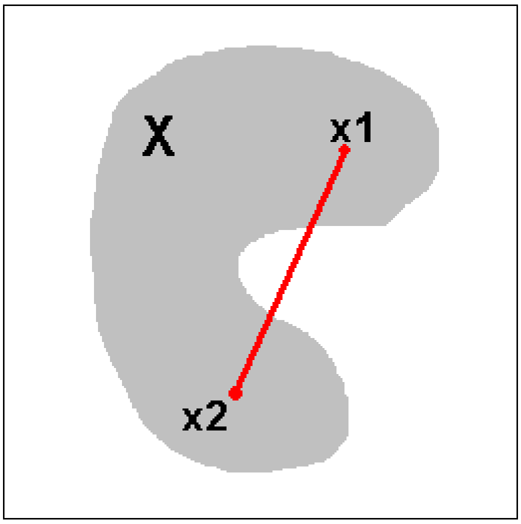


Figure 24 : Ensemble non convexe.

8.2 Propriétés de l'union et de l'intersection des ensembles convexes

Considérons un ensemble **X** et un ensemble **Y** convexes. Regardons si leur union ou leur intersection restent convexes.

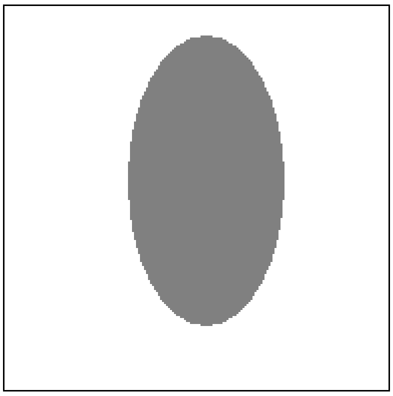


Figure 25a : **X**.

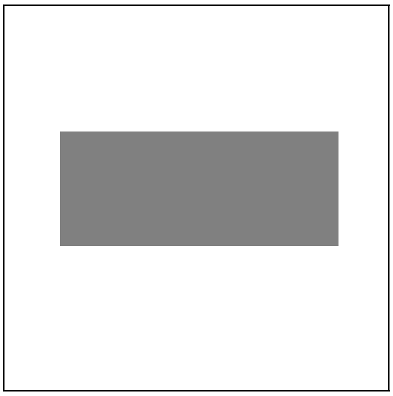


Figure 25b : **Y**.

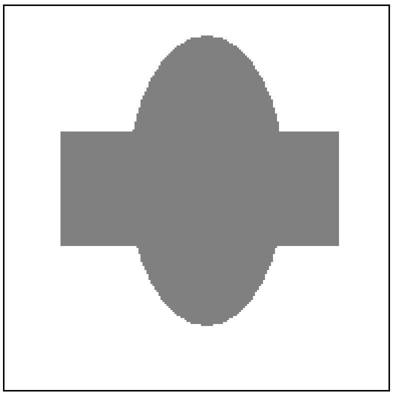


Figure 25c : **X∪Y**

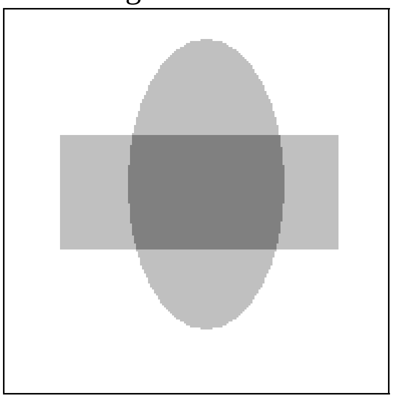


Figure 26 : **X∩Y**.

- *L'union de deux ensembles convexes n'est généralement pas convexe*. Ceci est illustré par la figure 25.

- *Par contre l'intersection de deux ensembles convexes (ou plus) donne toujours un ensemble convexe.* Ceci est illustré par la figure 26. Cette dernière propriété est très importante en morphologie mathématique.

8.3 Enveloppe convexe

Quel que soit un ensemble **X**, on peut lui associer un ensemble convexe dans lequel il est totalement inclus. Le plus petit de ces ensembles convexes est appelé *enveloppe convexe* et notée C_V(**X**). Dans le cas d'un ensemble **X** défini dans $\mathbf{R}^2$, l'enveloppe convexe correspond à l'intersection de tous les demi-plans qui contiennent l'ensemble **X**.

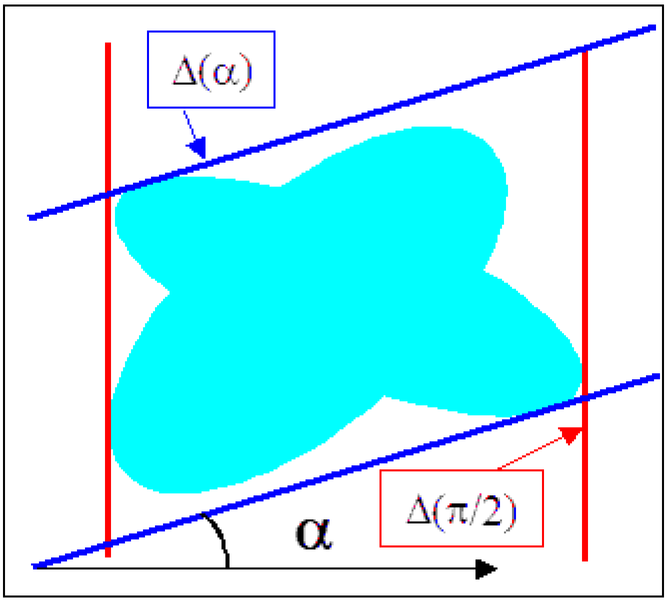


Figure 27 : Construction de l'enveloppe convexe.

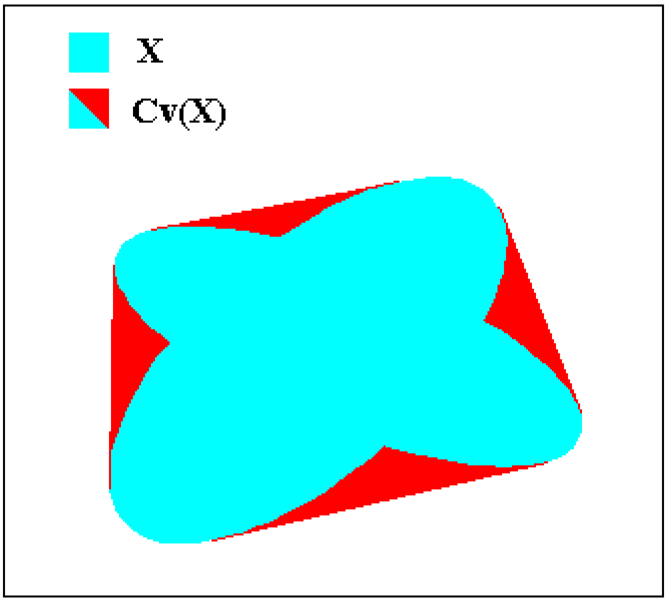


Figure 28 : Enveloppe convexe.

Un demi plan Π(α) est limité par la droite support Δ(α), d'orientation donnée. Pour une droite, il existe 2 demi-plans.

Pour construire l'enveloppe, on va prendre tous les demi-plans d'orientation α contenant **X,** obtenus par translation de $\Delta(\alpha)$. Le résultat de toutes les intersections forme une bande contenant **X** et limitée par deux droites $\Delta(\alpha)$ tangentes à **X** (figure27).

On recommence pour toutes les orientations α. La figure 27 montre le début de la construction pour 2 orientations et la figure 28 donne le résultat final.