

EROSION, DILATATION ET TRANSFORMATIONS ASSOCIES

En dehors des opérateurs ensemblistes classiques, la morphologie mathématique ensembliste dispose d'un ensemble d'opérateurs qui sont dérivés de deux opérateurs de base : *l'érosion et la dilatation*. Comme on l'a déjà dit, l'idée première de la morphologie mathématique est de comparer les objets à analyser à un autre objet de géométrie connue : *l'élément structurant*. Dans un premier temps, on va définir une transformation très générale appelée *transformation en tout ou rien*.

1. Transformation en tout ou rien par un élément structurant

1.1 Définition de l'élément structurant et de son transposé

Un élément structurant \mathbf{B} possède les caractéristiques suivantes :

- Il correspond à une forme (géométrie connue).
- Cette forme a une taille λ .
- Cet élément est repéré par son origine \mathbf{o} . Ce point origine appartient généralement à l'élément structurant mais ce n'est pas une obligation.

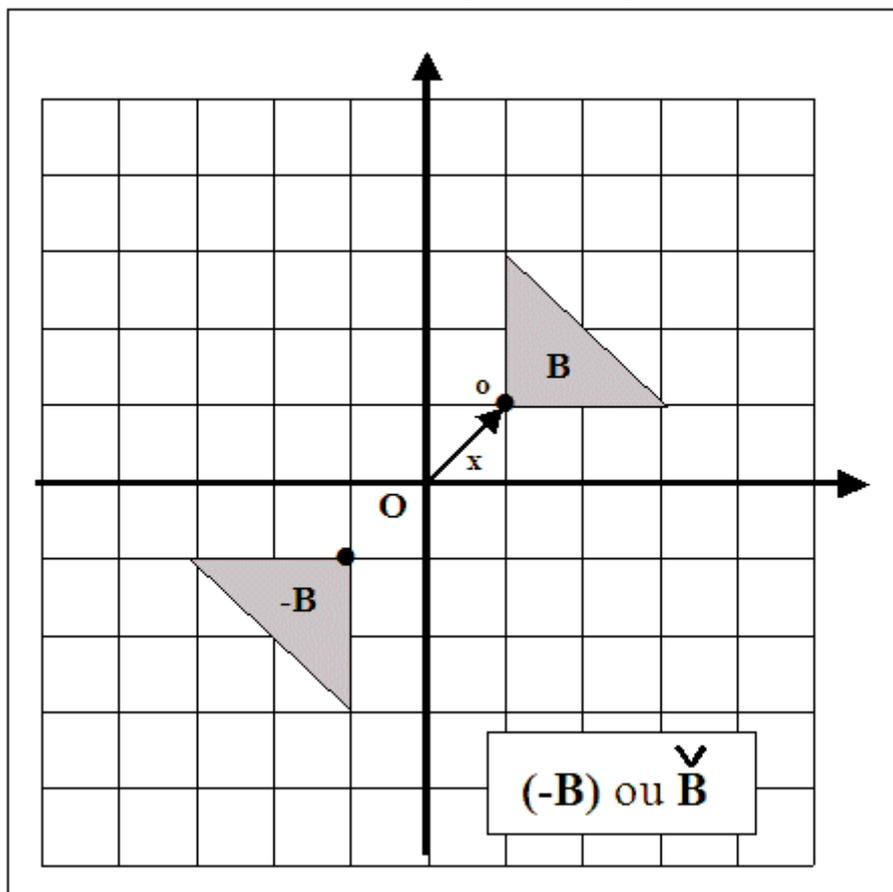


Figure 1 : Élément structurant triangulaire \mathbf{B} et son transposé $(-\mathbf{B})$ par rapport à \mathbf{O} .

Comme nous le verrons plus loin, les opérateurs de base de la morphologie mathématique correspondent à des additions ou des soustractions de Minkowski en

remplaçant l'ensemble \mathbf{B} par son transposé noté $\tilde{\mathbf{B}}$ ou $(-\mathbf{B})$. Le transposé de \mathbf{B} est l'élément structurant symétrique par rapport à son origine. Sur la figure 1 on a représenté dans l'espace métrique plan muni d'une origine \mathbf{O} un élément structurant triangulaire et son origine \mathbf{o} . Il se trouve à la position \mathbf{x} . C'est à dire translaté par un vecteur $\mathbf{x} = \overrightarrow{\mathbf{Oo}}$. Son symétrique par rapport à \mathbf{O} est noté $(-\mathbf{B})$.

1.2 Définition de la transformation en tout ou rien

Pour faire une *transformation en tout ou rien*, l'élément structurant est déplacé sur l'ensemble des points \mathbf{x} de l'espace de définition. Pour chaque position, on pose une *question relative à l'union, l'intersection ou l'inclusion* de l'élément \mathbf{B} avec l'ensemble \mathbf{X} analysé. Chaque *réponse positive* fournit un nouvel ensemble qui donne *l'image transformée*.

Les transformations en tout ou rien les plus simples sont :

- L'érosion qui est une transformation, en tout ou rien, relative à l'inclusion.
- La dilatation qui est relative à un test d'intersection.

Il existe des transformations en tout ou rien plus complexes utilisant des éléments structurants bi-colorés^a.

2. L'érosion et la dilatation ensemblistes

2.1 L'érosion

Son origine remonte à Hadwiger¹; ce concept a été repris par Matheron^{2 3} puis développé par Serra⁴. Pour définir la transformation par érosion dans un cadre ensembliste, considérons un ensemble $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$, (figure 2a). Soit \mathbf{B} un élément structurant carré dont l'origine est choisie en son centre de manière à avoir $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$.

Pour chaque position $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, on pose la question : est-ce que \mathbf{B}_x centré en \mathbf{x} est inclus dans \mathbf{X} ?

Les réponses positives forme un nouvel ensemble, (figure 2b) *appelé érodé de \mathbf{X} par \mathbf{B}* :

$$\varepsilon^{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) = \{ \mathbf{x} : \mathbf{B}_x \subset \mathbf{X} \}$$

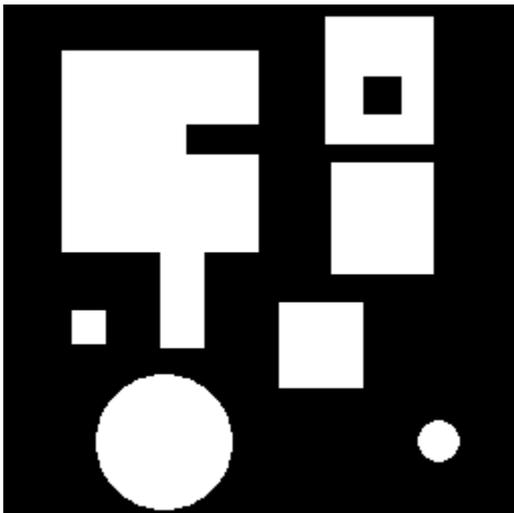


Figure 2a :Ensemble \mathbf{X}_1 .

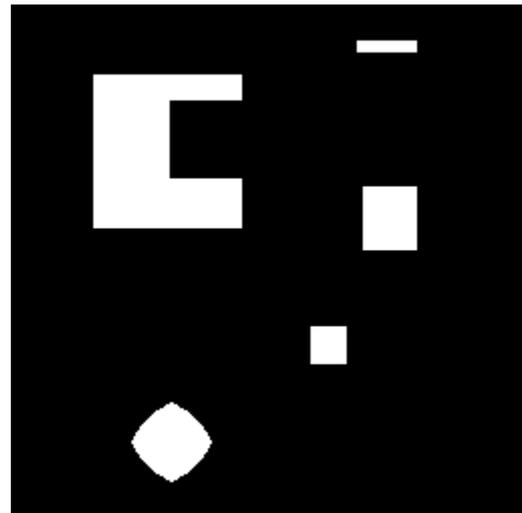


Figure 2b : $\varepsilon^{\mathbf{B}}(\mathbf{X})$: (carré $\lambda = 12$)

^a Voir chapitre :

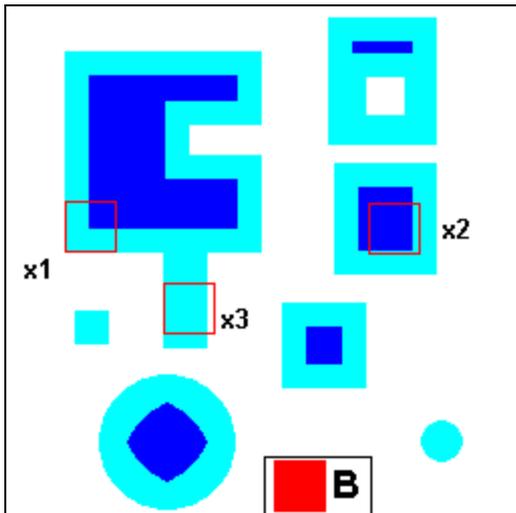


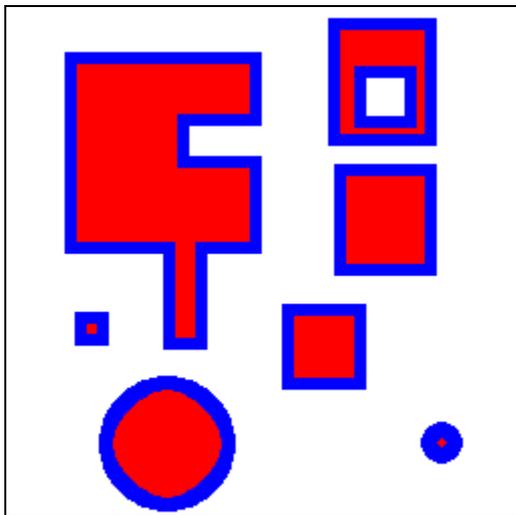
Figure 2c : Illustration du principe de l'érosion

- ■ : élément **B**
- □ x_n : position de **B**
- ● : ensemble **X**
- ● : érodé de **X** par **B**
- ●

On peut faire quelques commentaires sur la figure 2c où on a représenté l'élément structurant **B** et différentes positions :

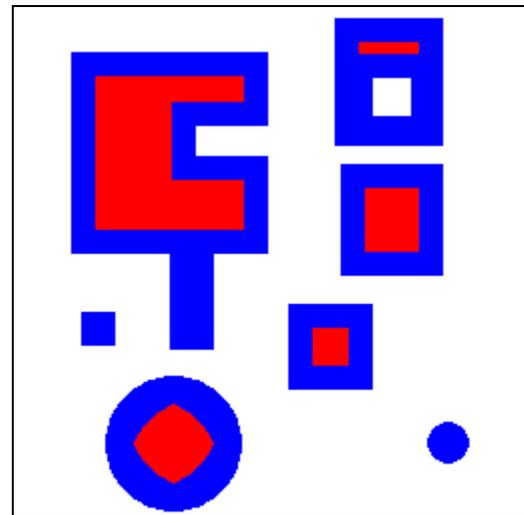
- Les positions x_1 et x_2 correspondent à un carré totalement inclus dans **X**. Le centre du carré appartient à l'érodé de **X** par **B**.
- La position x_1 montre que le carré n'est pas totalement inclus dans **X**. Son centre appartient à une partie de **X** éliminée par l'érosion.

D'un point de vue qualitatif, l'érosion par un élément convexe diminue la taille des objets les plus gros et supprime les plus petits. Il supprime également les aspérités moins épaisses que l'élément **B**.



■ ■ = **X**, ■ = $\varepsilon^B(\mathbf{X})$

Figure 3a : $\varepsilon^B(\mathbf{X})$: (carré $\lambda = 6$)

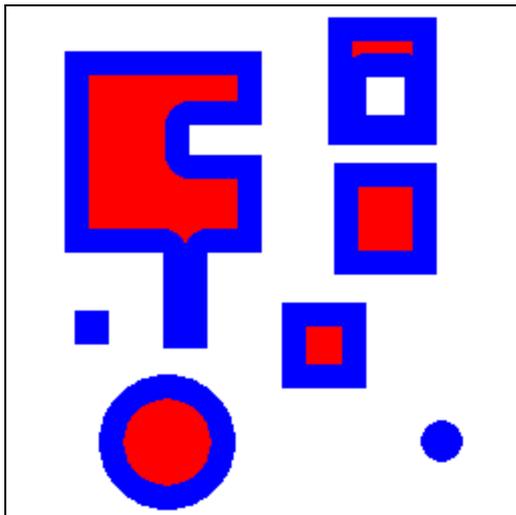


■ ■ = **X**, ■ = $\varepsilon^B(\mathbf{X})$

Figure 3b : $\varepsilon^B(\mathbf{X})$: (carré $\lambda = 12$)

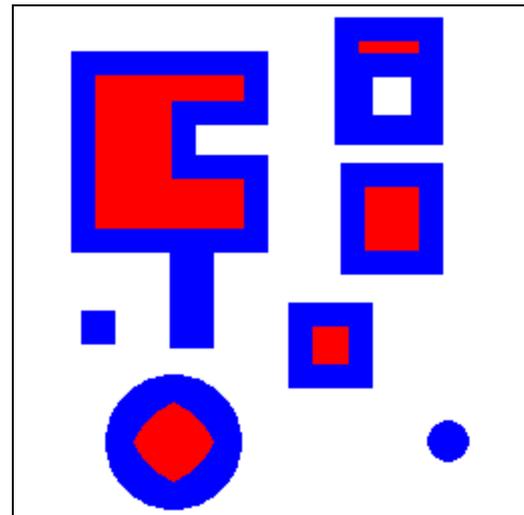
Pour un même élément structurant, le résultat de l'érosion dépend de la taille λ de cet élément, (figure 3a et b).

Le résultat dépend également de la forme de l'élément structurant. Ceci est illustré par la figure 4.



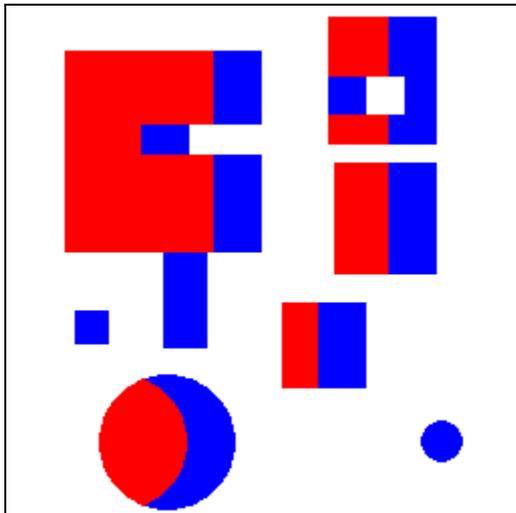
■ ■ = X, ■ = $\varepsilon^B(X)$

Figure 4a : Erosion par un dodécagone $\lambda=12$.



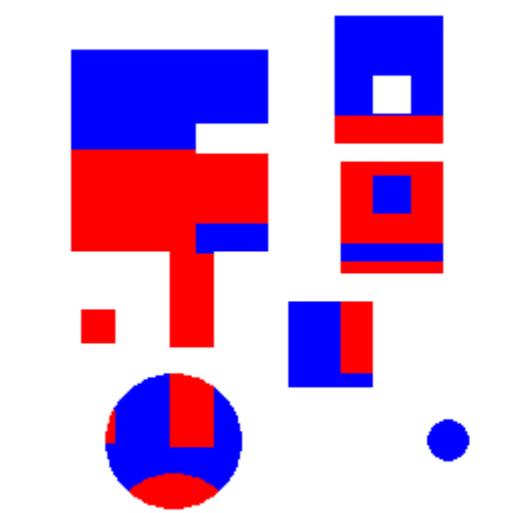
■ ■ = X, ■ = $\varepsilon^B(X)$

Figure 4b : Erosion par un carré $\lambda=12$.



■ ■ = X, ■ = $\varepsilon^B(X)$

Figure 4c : Erosion par un segment droit horizontal $\lambda=24$



■ ■ = X, ■ = $\varepsilon^B(X)$

Figure 4d : Erosion par un bi-point vertical $h=50$

Comparons les figures 4a et 4b. Un élément structurant relativement arrondi comme le dodécagone régulier donne des résultats différents de ceux du carré de même taille en particulier au niveau des parties concaves des objets. Un cercle reste pratiquement un cercle par érosion dodécagonale alors le carré donne un ensemble anguleux.

Dans le cas d'un élément structurant linéaire comme le segment horizontal utilisé figure 4c. La hauteur des objets pleins n'est pas modifiée seule la largeur horizontale est érodée. On remarquera qu'on n'a pas utilisé un segment horizontal avec une origine au centre mais à son extrémité gauche.

Le résultat de la figure 4d est plus surprenant car on n'a pas utilisé un élément structurant convexe, comme pour les figures précédentes, mais un élément constitué uniquement de deux points alignés verticalement et distants de $h=50$. L'usage de ce type d'élément structurant sera vu plus loin.

2.2 La dilatation

La transformation par dilatation se définit de manière analogue. Elle a été introduite par H. Minkowski⁵ et développée par G Matheron^{2 3} et J. Serra⁴. En prenant le même élément structurant, on pose pour chaque point $x \in \mathbf{R}^2$, la question : \mathbf{B}_x touche-t-il l'ensemble \mathbf{X} ? L'ensemble des réponses positives forme un nouvel ensemble appelé dilaté de \mathbf{X} par \mathbf{B} :

$$\delta^{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) = \{x : \mathbf{B}_x \uparrow \mathbf{X}\} = \{x : \mathbf{B}_x \cap \mathbf{X} \neq \emptyset\}$$

La figure 5a montre l'ensemble initial et la figure 5b l'ensemble dilaté par un carré de taille 10. Le principe de la dilatation est illustré par la figure 5c.

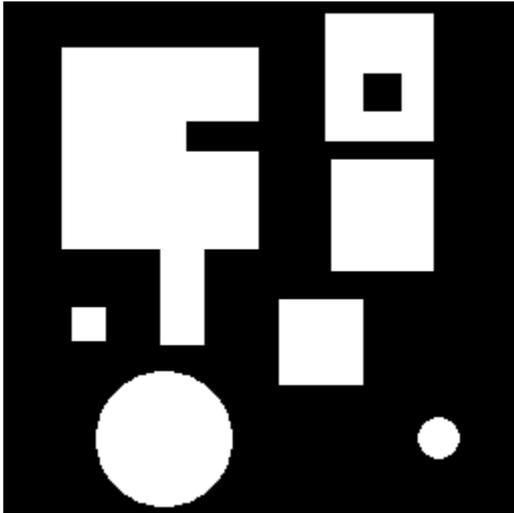


Figure 5a : Ensemble X_1 .

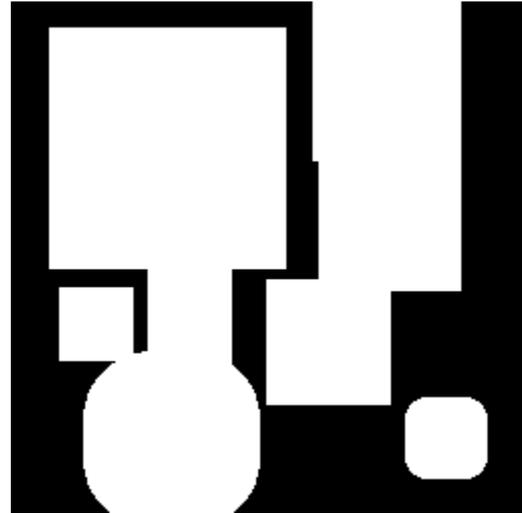


Figure 2b : $\delta^{\mathbf{B}}(\mathbf{X})$: (carré $\lambda = 10$)

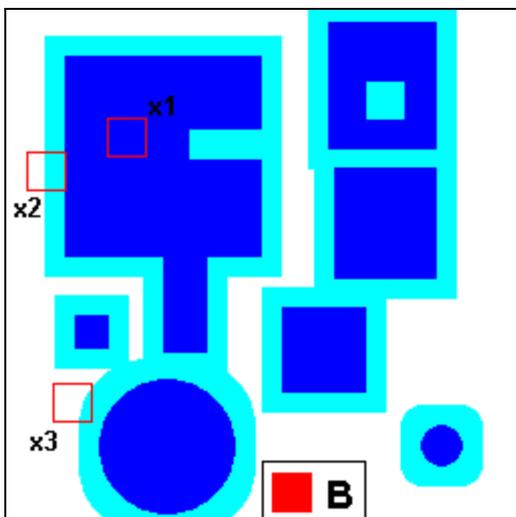


Figure 5c : Illustration du principe de la dilatation

- ■ : élément \mathbf{B}
- □ x_n : position de \mathbf{B}
- ● : ensemble \mathbf{X}
- ●■ : dilaté de \mathbf{X} par \mathbf{B}

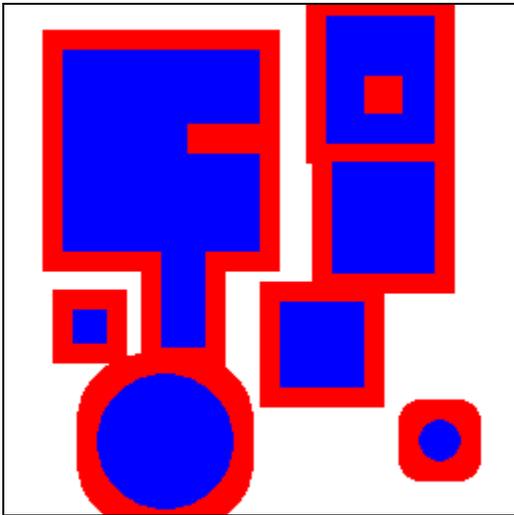
On peut faire quelques commentaires sur la figure 5c où on a représenté l'élément structurant \mathbf{B} et différentes positions :

- Position x_1 et x_2 , l'élément structurant est inclus ou touche \mathbf{X} . Les points x_1 et x_2 appartiennent au dilaté de \mathbf{X} .
- Position x_3 l'élément ne touche pas \mathbf{X} . Il n'appartient pas au dilaté.

D'un point de vue qualitatif la dilatation par un élément structurant convexe augmente la taille de \mathbf{X} , bouche les trous et les concavités plus étroites que l'élément structurant. Il peut rendre connexe des parties disjointes de \mathbf{X} si elles sont assez proches.

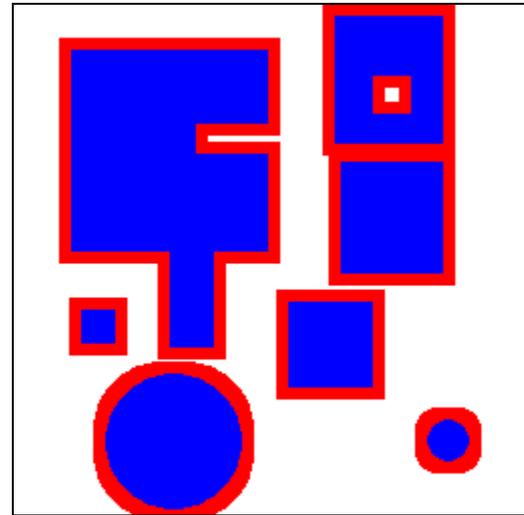
Comme pour l'érosion le résultat dépend d'abord de la taille λ de l'élément structurant, (figures 6a et b).

La forme de l'élément structurant a également une influence sur les résultats, (figure 7a et b). En particulier les parties dilatées convexes prennent la forme de l'élément structurant. Pour la dilatation avec un segment de droite, seule l'orientation du segment est dilatée. Ici encore, on n'a pas utilisé un segment centré.



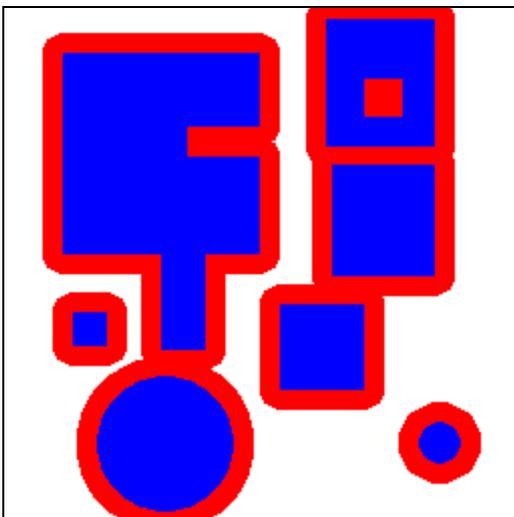
■ = X, ■ ■ = $\delta^B(X)$

Figure 6a: $\delta^B(X)$: (carré $\lambda = 10$)



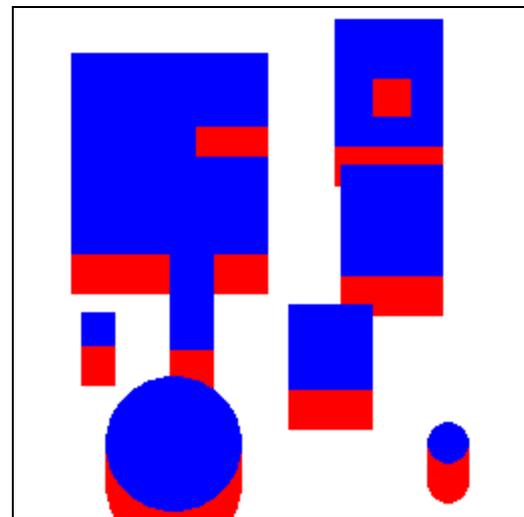
■ = X, ■ ■ = $\delta^B(X)$

Figure 6a: $\delta^B(X)$: (carré $\lambda = 6$)



■ = X, ■ ■ = $\delta^B(X)$

Figure 7a: $\delta^B(X)$: (dodécagone $\lambda = 10$)



■ = X, ■ ■ = $\delta^B(X)$

Figure 7b: $\delta^B(X)$: (segment vert. $\lambda = 20$)

3. Propriétés de l'érosion et de la dilatation

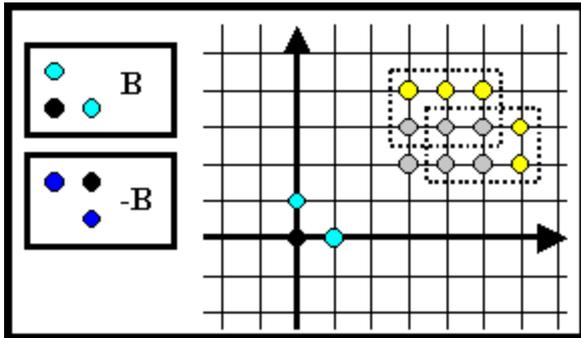
3.1 Relation entre la dilatation et l'addition de Minkowski

Comme nous l'avons indiqué dans la bibliographie, la dilatation est directement issue des travaux de Minkowski. Nous allons donc montrer la relation entre ces deux opérateurs. Pour cela, on va utiliser un élément B triangulaire de 3 pixels et un ensemble X rectangulaire

de 2×3 pixels, et appliquer l'addition de Minkovski ($X \oplus B$) (figure 8a). Sur la figure 8b on a représenté la dilatation de X par $(-B)$. Les résultats sont identiques $\delta_{(-B)}(X) = (X \oplus B)$. La dilatation ensembliste n'est rien d'autre qu'une addition de Minkovski avec l'élément structurant transposé. Dans la pratique, on écrit :

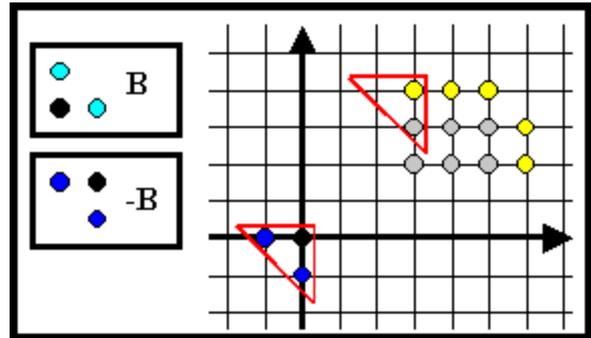
$$\delta_B(X) = (X \oplus (-B)) = (X \oplus \check{B})$$

Cette relation a une grande importance car les propriétés de l'addition de Minkovski vont se retrouver dans la dilatation. De plus, de part la définition de l'addition de Minkovski, les dilatations ensemblistes seront construites à partir d'une suite de translations et d'unions.



● = Ensemble X
● = Points ajoutés par l'addition
----- = Résultat de la translation

Figure 8a : Addition de Minkowski

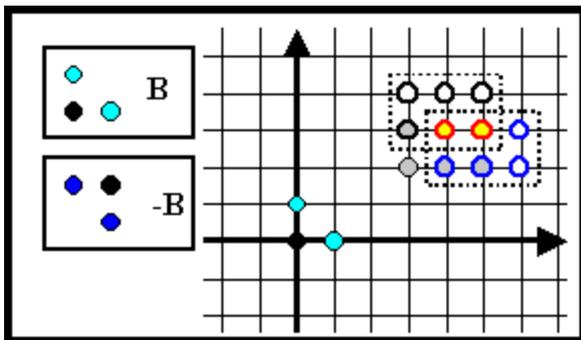


● = Ensemble X
● = Points ajoutés par la dilatation
□ = Trace de $(-B)$

Figure 8b : Dilatation

3.2 Relation entre l'érosion et la soustraction de Minkowski

La même démarche peut être entreprise avec l'érosion et la soustraction de Minkovski, figure 9a et b).



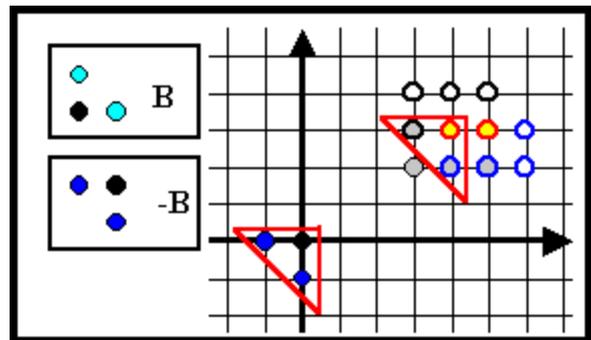
● = Ensemble X
● = Points conservés après soustraction
----- = Résultat de la translation

Figure 9a : Soustraction de Minkowski

On peut donc écrire la relation entre les deux opérateurs :

$$\varepsilon_B(X) = (X \ominus (-B)) = (X \ominus \check{B})$$

L'érosion ensembliste est identique à la soustraction de Minkovski par l'élément transposé. Les propriétés de la soustraction de Minkovski vont se retrouver dans celles de



● = Ensemble X
● = Points conservés après érosion
□ = Trace de $(-B)$

Figure 9b : Erosion

l'érosion. Compte tenu de la définition de la soustraction de Minkowski, l'érosion morphologique est une suite de translations et d'intersections.

3.3 Propriétés algébriques de la dilatation

- La dilatation est une transformation extensive si et seulement si \mathbf{B} contient l'origine, car, dans ce cas, le dilaté de \mathbf{X} contient toujours \mathbf{X} , (figure 5c) :

$$\mathbf{X} \subseteq \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{X})$$

- La dilatation est une transformation croissante. On retrouve ici une propriété de l'addition de Minkowski liée à l'union.

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \Rightarrow \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) \subseteq \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{Y})$$

Ceci est illustré par les figures 10a et b.



$$\square = \mathbf{X}, \square \blacksquare = \mathbf{Y}$$

Figure 10a : Ensemble $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$



$$\square = \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}), \square \blacksquare = \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{Y})$$

Figure 10b : Ensemble $\delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) \subset \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{Y})$

- La dilatation est une transformation qui n'est pas idempotente. On a, en effet :

$$\delta_{\mathbf{B}}(\delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{X})) \neq \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{X})$$

- Par contre, si l'élément structurant $\mathbf{B}(\lambda)$ appartient à une famille d'éléments homothétiques les uns avec les autres, la dilatation vérifie une propriété d'itérativité qui s'écrit, par exemple, pour $\lambda=3$ fois l'élément unitaire :

$$\delta_{3\mathbf{B}}(\mathbf{X}) = \delta_{1\mathbf{B}}(\delta_{1\mathbf{B}}(\delta_{1\mathbf{B}}(\mathbf{X})))$$

C'est une propriété importante pour la programmation des opérateurs. Ainsi pour faire une dilatation de taille n , il suffit d'exécuter n fois une dilatation de taille unitaire dans une boucle.

- La dilatation est une transformation qui est continue. Nous avons, en effet vu que l'union est un opérateur continu. Les propriétés de continuité l'addition de Minkowski se retrouvent dans la dilatation.
- La dilatation est distributive par rapport à l'union. Ceci s'écrit :

$$\delta_{\mathbf{B} \cup \mathbf{B}'}(\mathbf{X}) = \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) \cup \delta_{\mathbf{B}'}(\mathbf{X})$$

Il revient au même de faire une dilatation de X directement avec l'union de deux éléments structurants ou de dilater séparément X par chacun des éléments et ensuite de faire l'union. Ceci est illustré par la figure 11a à 11d. La présence du pixel isolé (fig. 11a) montre la formation de l'élément structurant en L de la figure 11d. En effet, on a la relation :

$$\delta_{\mathbf{B}} \{X\} = \mathbf{B}$$

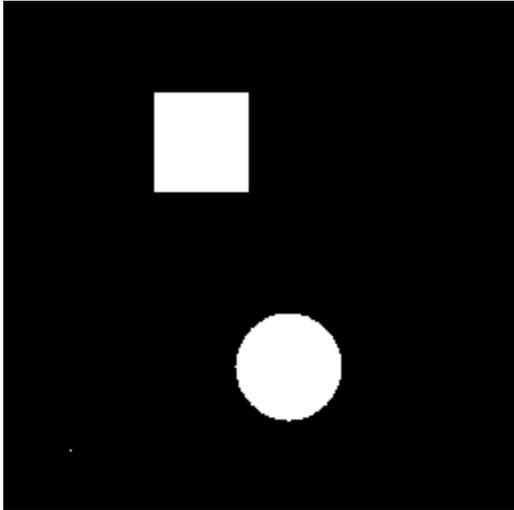


Figure 11a : Ensemble X .

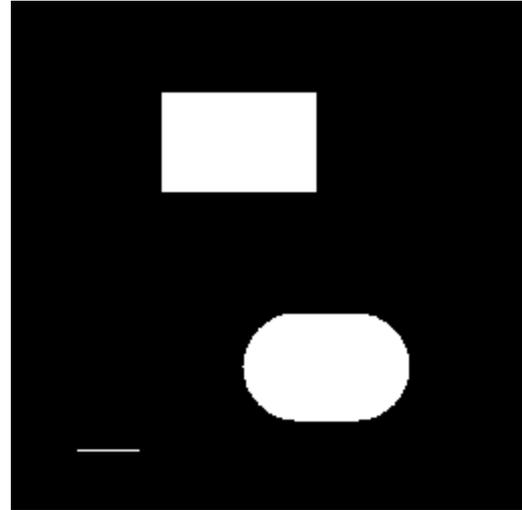


Figure 11b : Ensemble X dilaté par un segment horizontal \mathbf{B}_1 de taille 30.



Figure 11c : Ensemble X dilaté par un segment vertical \mathbf{B}_2 de taille 30.

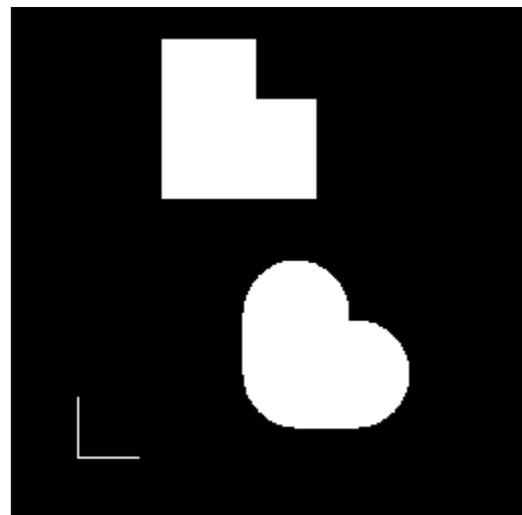


Figure 11d : Union des figures 11b et c.
 $Y = \delta_{\mathbf{B}_1}(X) \cup \delta_{\mathbf{B}_2}(X) = \delta_{\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2}(X)$

3.4 Compatibilité avec les homothéties

Les images analysées passent par un système optique avant de se former sur le capteur. En microscopie optique ou électronique, l'image est très agrandie par rapport à la structure réelle. Par contre, pour les images obtenues à partir des images satellites, on obtient une image avec un important rapport de réduction.

De plus, au cours d'une même analyse, on peut être amené à changer le rapport de grandissement en utilisant un autre objectif sur le microscope ou le photoscope. Ces opérations se décrivent mathématiquement comme des homothéties.

3.4.1 Définition

Comme toute analyse d'image se termine par une mesure, il s'agit de savoir si une procédure de traitement mise au point à un grandissement G_1 sera toujours valable à un grandissement G_2 . Le rapport $R = G_1/G_2$ définit le rapport d'homothétie.

Par définition, un opérateur de transformation d'image ψ_λ dépendant d'un paramètre de taille λ sera dit compatible avec les homothéties si la relation suivante est vérifiée.

$$\psi_1(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda^n}(\psi_\lambda(\lambda\mathbf{X}))$$

n est un entier représentant la dimension du paramètre de taille ($n = 1$ pour des longueurs, $n = 2$ pour des aires ...) et $\lambda\mathbf{X}$ définissant l'ensemble déduit de \mathbf{X} dans un rapport d'homothétie λ .

3.4.2 Compatibilité avec les homothéties pour les opérateurs morphologiques : cas de la dilatation



Figure 12a : $\mathbf{1X}$.



Figure 12b : $\delta_{SB}(\mathbf{1X})$



Figure 12c : $\mathbf{Y} = (\delta_{10B}(\mathbf{2X})) / 2^1$



Figure 12d : $\mathbf{2X}$.



Figure 12e : $\delta_{10B}(\mathbf{2X})$.

Dans le cas des transformations de morphologie mathématique, cette compatibilité ne peut être vérifiée que si l'élément structurant appartient à une famille d'éléments qui peuvent se déduire les uns des autres par un rapport d'homothétie λ .

Si l'élément structurant vérifie cette propriété, la *dilatation sera compatible avec les homothéties*. On aura en effet :

$$\delta_{1B}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda} \delta_{\lambda B}(\lambda \mathbf{X})$$

Ceci est illustré par la figure 12 où l'élément **B** est un carré.

3.5 Propriétés topologiques de la dilatation

- La dilatation, comme l'union, préserve la connexité.
- La dilatation n'est pas une transformation homotopique. En effet, elle connecte des éléments disjoints et bouche des trous. Cela est visible sur les figures 5 à 7.

3.6 Propriétés algébriques de l'érosion

- L'érosion est une transformation anti-extensive. En effet l'ensemble départ contient toujours son érodé à condition que l'élément structurant contienne son origine. Cela se traduit par la relation :

$$\varepsilon_B(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}$$

Ceci peut être observé sur les figures 2 à 4.

- L'érosion est une transformation croissante. On retrouve ici une propriété de la soustraction de Minkowski liée à l'intersection.

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \Rightarrow \varepsilon_B(\mathbf{X}) \subseteq \varepsilon_B(\mathbf{Y})$$

Ceci est illustré par la figure 13a et b.



□ = X, □■ = Y



□ = ε_B(X), □■ = ε_B(Y)

Figure 13a : Ensemble $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$

Figure 13b : Ensemble $\varepsilon_B(\mathbf{X}) \subset \varepsilon_B(\mathbf{Y})$

- L'érosion est une transformation qui n'est pas idempotente. On a, en effet :

$$\varepsilon_B(\varepsilon_B(\mathbf{X})) \neq \varepsilon_B(\mathbf{X})$$

- Par contre, si l'élément structurant $\mathbf{B}(\lambda)$ appartient à une famille d'éléments homothétiques les uns avec les autres, l'érosion vérifie la propriété d'itérativité qui s'écrit, par exemple, pour $\lambda = 3$ fois l'élément unitaire :

$$\varepsilon_{3B}(X) = \varepsilon_{1B}(\varepsilon_{1B}(\varepsilon_{1B}(X)))$$

On aura donc le même style de programmation que pour la dilatation.

- L'érosion est une transformation semi-continue supérieure. Cette propriété découle directement de la propriété de l'intersection dans la soustraction de Minkowski. Pour illustrer cette propriété, il faut se donner une suite d'ensembles X_n qui converge vers un ensemble X_0 . On choisit deux carrés de côté a distants de $d = 1/n$, (figure 14). Cette suite converge vers un rectangle de hauteur a et de largeur $2a$.

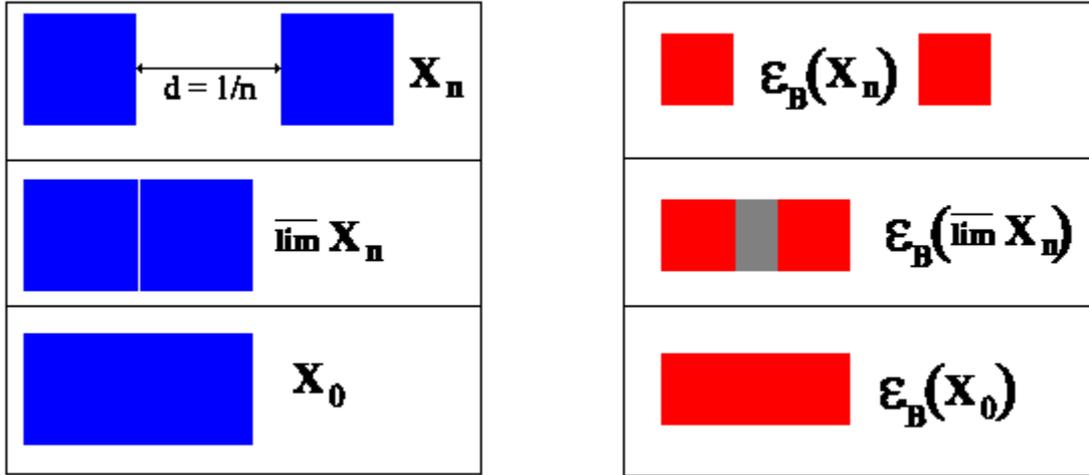


Figure 14a : Suite d'ensembles et sa limite. Figure 14b : Résultat de l'érosion sur la suite d'ensemble et la limite.

On remarque que :

$$\varepsilon(\overline{\lim}(X_n)) \subset \varepsilon_B(X_0)$$

Cela signifie que la continuité supérieure est vérifiée.

- L'érosion est distributive par rapport à l'intersection. Ceci s'écrit :

$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X)$$

Il revient au même de faire une érosion de X directement avec l'union de deux éléments structurants ou d'éroder séparément X par chacun des éléments et ensuite de faire l'intersection. Ceci est illustré par la figure 14. L'élément B est cette fois l'union d'un segment vertical et horizontal de 30 pixels. La figure 15a montre l'image initiale, la figure 15b l'érosion horizontale, la figure 15c l'érosion verticale et la figure 15d le résultat final après intersection.

3.7 Propriétés topologiques de l'érosion

- L'érosion, comme l'intersection, ne préserve pas la connexité.
- L'érosion n'est pas une transformation homotopique. En effet, elle sépare les parties connexes et supprime des éléments lorsqu'ils sont petits. Cela est visible sur les figures 2 à 4.

3.8 Dualité entre l'érosion et la dilatation

- L'érosion par un élément structurant B est duale, vis à vis de la complémentation, avec la dilatation par le même élément. Cette dualité s'écrit :

$$\varepsilon_B(X) = (\delta_B(X^c))^c$$

Il revient au même d'éroder directement l'ensemble X ou de dilater son complémentaire et prendre le complément du résultat.

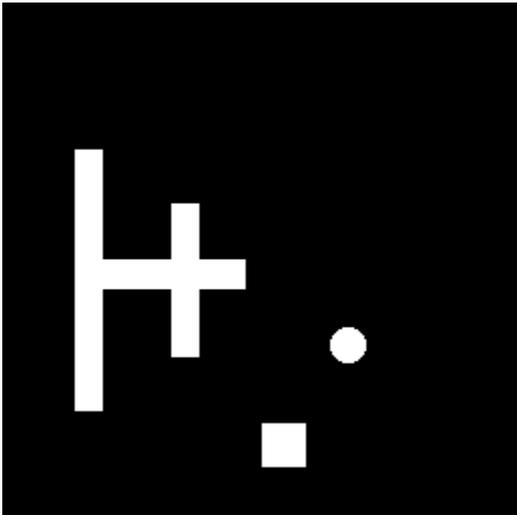


Figure 15a : Ensemble X .

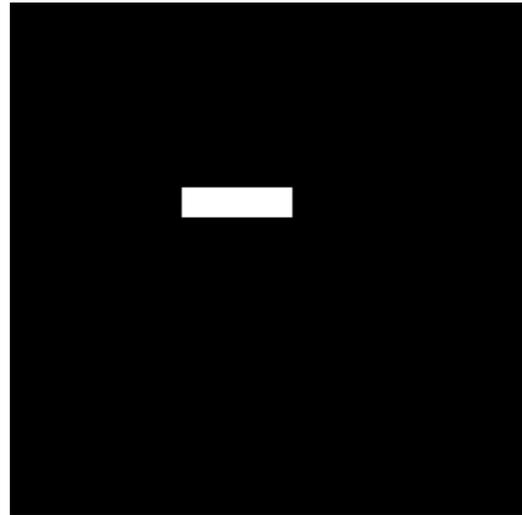


Figure 15b : Erosion par B_1
(segment horizontal de 30 pixels).

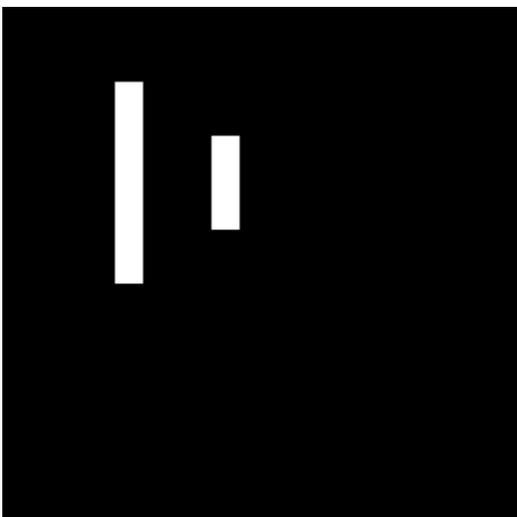


Figure 15c : Erosion par B_2
(segment vertical de 30 pixels).

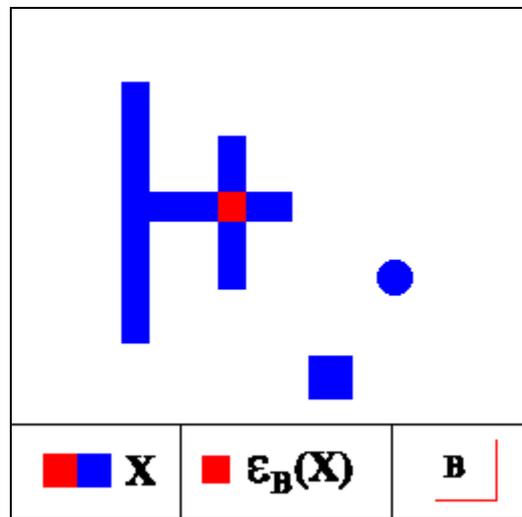


Figure 15c : Résultat final
 $\varepsilon_B(X) = \varepsilon_{B_1 \cup B_2}(X) = \varepsilon_{B_1}(X) \cap \varepsilon_{B_2}(X)$

4. Erosion et dilatation de fonctions

Pour passer de l'érosion et la dilatation ensembliste à la l'érosion et la dilatation sur les fonctions, on utilise la notion d'ombre d'une fonction introduite au chapitre « Ensembles et images ». Pour faciliter l'interprétation graphique de ce passage, on donnera un exemple sur

une « image » définie dans \mathbf{R}^1 . Dans ces conditions, la fonction associée est $f(x)$. Ceci est illustré par la figure 16.

4.1 Nature de l'élément structurant

L'élément structurant, utilisé pour transformer une image, est défini dans le même « espace » que l'image. Dans le cas de la figure 16, l'abscisse x donne la position du point image sur le support et l'ordonnée $f(x)$, la valeur radiométrique. Même si on passe à une description purement ensembliste, les 2 axes n'ont pas la même signification physique. Ce raisonnement s'étend à n'importe quel espace de définition de l'image. Lorsque l'image a un support défini dans \mathbf{R}^2 , le troisième axe est relatif à la valeur radiométrique.

Un élément structurant \mathbf{B} utilisé pour traiter des images en niveaux de gris est donc composé d'un élément géométrique \mathbf{B}' défini dans \mathbf{R}^2 et d'une fonction associée $b(x)$ telle que :

$$b(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{B}' \Rightarrow b(\mathbf{x}) \neq \pm\infty \\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B}' \Rightarrow b(\mathbf{x}) = -\infty \end{cases}$$

Les éléments structurants, ainsi définis, peuvent être classés en deux catégories :

- Les éléments structurants plats dont la fonction s'écrit

$$b(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{B}' \Rightarrow b(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B}' \Rightarrow b(\mathbf{x}) = -\infty \end{cases}$$

- Les éléments structurants volumiques qui correspondent à la relation générale. Les éléments structurants plats sont les plus utilisés.

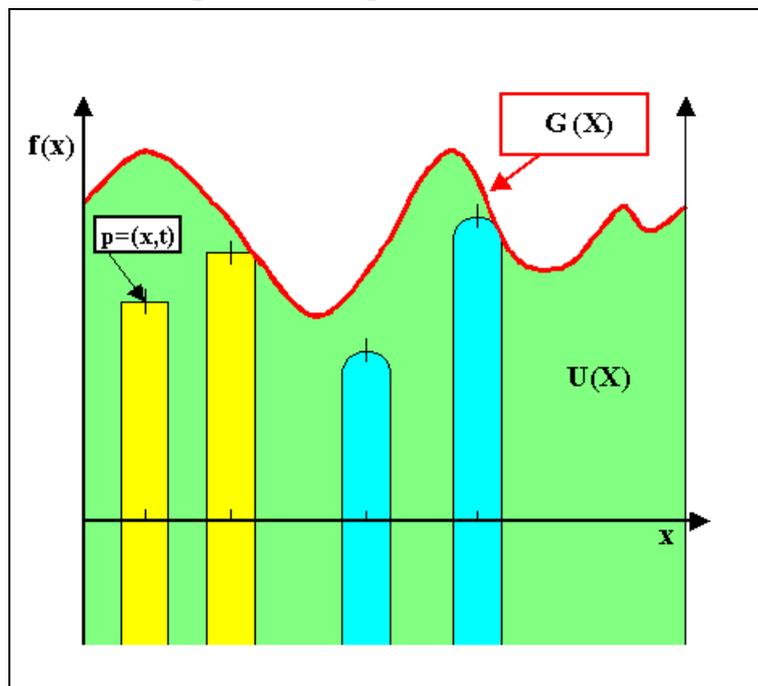


Figure 16 : Fonction $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}$ et éléments structurants associés,

■ = Elément structurant plat, ■ = Elément structurant volumique.

Rappelons que le graphe de la fonction se traduit de manière ensembliste par l'expression :

$$\mathbf{G}(f(x)) = \{p(x, t) : t = f(x)\}$$

L'expression de l'ombre s'écrit également :

$$U(f(x)) = \{p(x, t) : t \leq f(x)\}$$

4.2 Erosion d'une fonction

4.2.1 Cas d'un élément structurant plat

Si on part de la définition ensembliste de l'érosion, on peut écrire, en utilisant l'ombre de la fonction :

$$\varepsilon_B(U(f(x))) = \{(x, t) : \mathbf{B}_{x,t} \subseteq U(f(x))\}$$

On voit sur la figure 16 que l'élément structurant, positionné à l'abscisse x et repéré par son origine, peut glisser verticalement jusqu'à une position maximale en hauteur au-delà de laquelle il n'est plus inclus (éléments plats et volumiques de droite de la figure 16).

Pour un élément structurant plat, cela se traduit par l'expression suivante, en terme de fonction :

$$\varepsilon_B(f(x)) = \inf (f(x - u) : u \in \mathbf{B}')$$

Ceci est illustré par la figure 17 dans le cas d'une fonction $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}$.

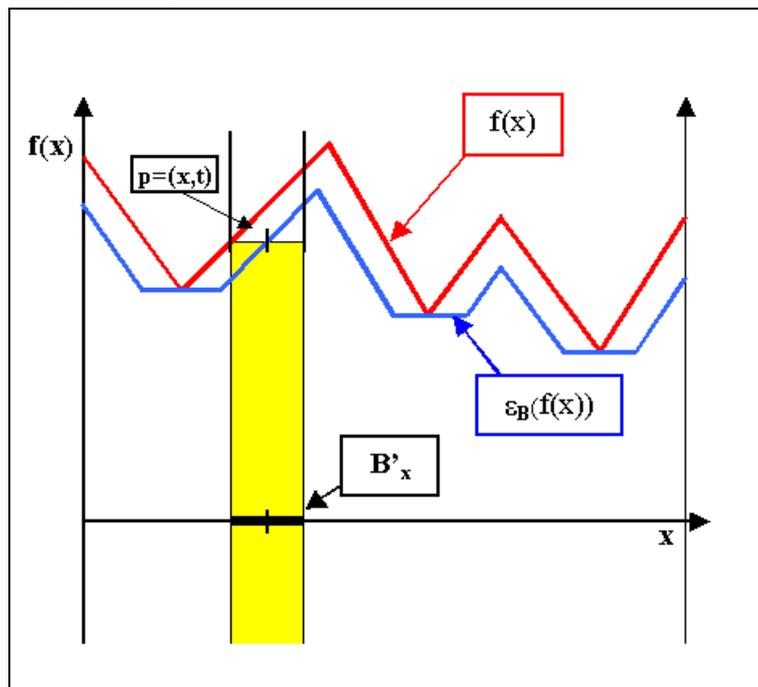


Figure 17 : Erosion d'une fonction $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}$.

On remarque que la fonction érodée est inférieure ou égale à la fonction de départ. C'est une conséquence de l'anti-extensivité de l'érosion. La géométrie du support \mathbf{B}' des éléments structurants est rigoureusement la même que dans le cas ensembliste. Les figures 18a et b illustrent l'effet d'un élément structurant plat carré sur une image en niveaux de gris.

4.2.2 Cas d'un élément structurant volumique

Dans ce cas, il faut expliciter la fonction b caractéristique de l'élément structurant. La définition fonctionnelle de l'érosion devient :

$$\varepsilon_B(f(x)) = \inf ((f(x - u) - b(u)) : u \in \mathbf{B}') = \wedge_u ((f(x - u) - b(u)) : u \in \mathbf{B}')$$

La figure 18c illustre le cas d'une érosion de l'image de la figure 17a par un élément structurant volumique.

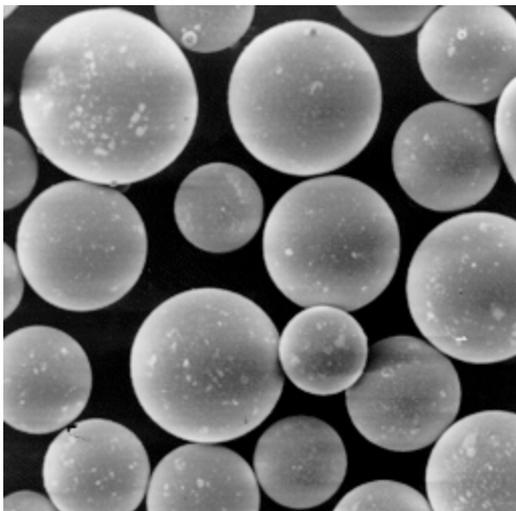


Figure 18a : Billes de verre BV (microscope électronique à balayage)

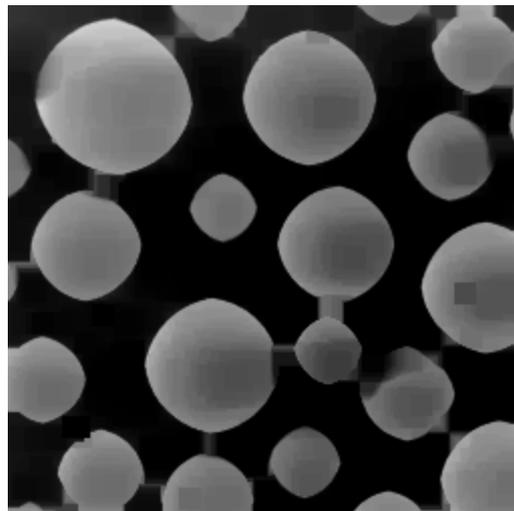


Figure 18b : Erosion de l'image BV par un élément structurant plat carré de taille 5.

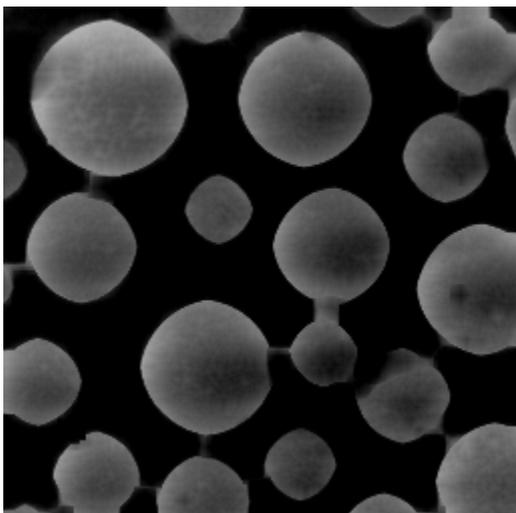


Figure 18c : Erosion de l'image BV par un élément structurant volumique rhomboédrique de taille 5 et de hauteur 5.

4.3 Dilatation d'une fonction

4.3.1 Dilatation par un élément structurant plat

La figure 19 décrit, de manière analogue à la figure 17, le principe de la dilatation par un élément structurant plat. En tenant compte de la dualité entre l'érosion et la dilatation, on peut voir que l'élément noté \mathbf{B}^C est inclus dans le complémentaire de $\mathbf{U}(f(x))$. Cela permet de définir la position de l'élément structurant \mathbf{B} par rapport à $\mathbf{U}(f(x))$.

Pour un élément structurant plat, cela se traduit par l'expression suivante, en terme de fonction :

$$\delta_{\mathbf{B}}(f(x)) = \sup(f(x - u) : u \in \mathbf{B}')$$

On remarque que la fonction dilatée est supérieure ou égale à la fonction de départ. C'est une conséquence de l'extensivité de la dilatation.

Les figures 20a illustre l'effet d'un élément structurant plat à support carré sur une image en niveaux de gris.

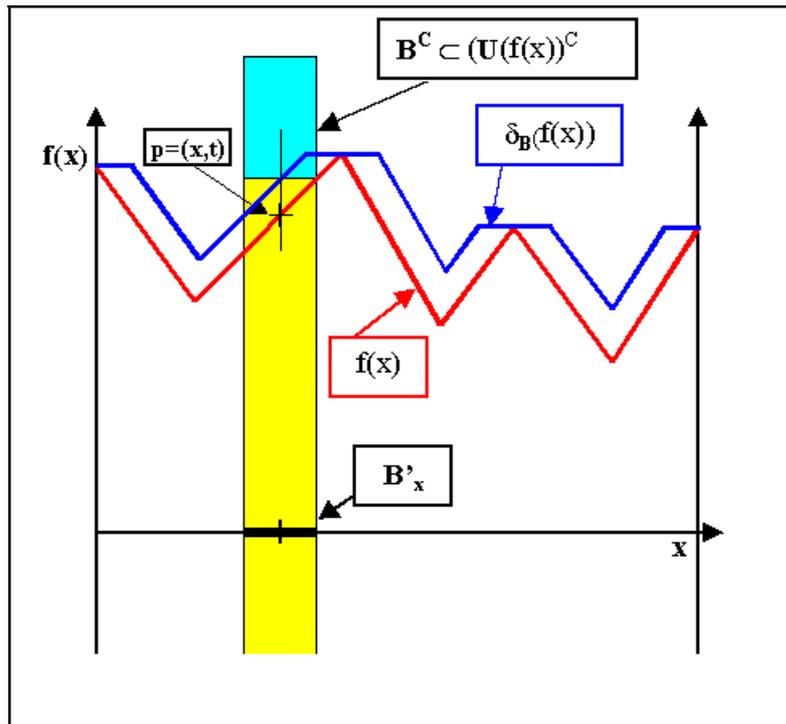


Figure 19 : Dilatation d'une fonction $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}$.

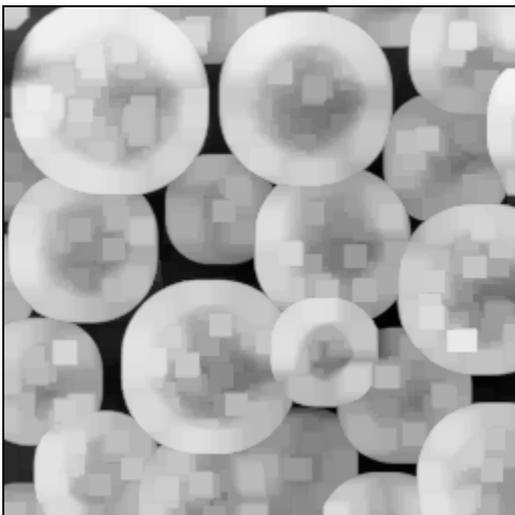


Figure 20a : Dilatation de l'image BV par un élément structurant plat carré de taille 5.

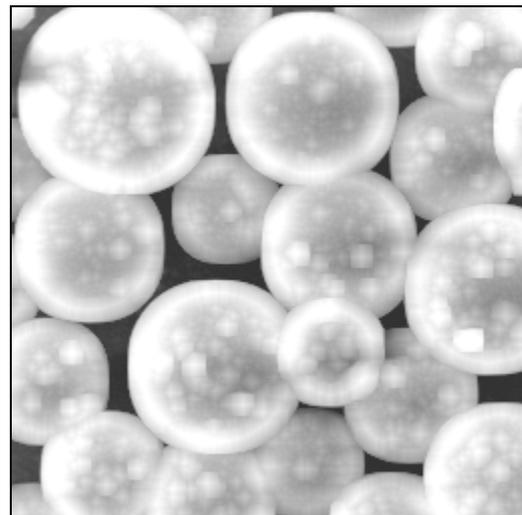


Figure 20b : Dilatation de l'image BV par un élément structurant volumique rhomboédrique de taille 5 et de hauteur 5.

4.3.2 Dilatation par un élément structurant volumique

Dans ce cas, il faut expliciter la fonction b caractéristique de l'élément structurant. La définition fonctionnelle de la dilatation devient :

$$\delta_b(f(x)) = \sup((f(x-u) + b(u)) : u \in \mathbf{B}') = \vee_u((f(x-u) + b(u)) : u \in \mathbf{B}')$$

La figure 20b illustre la dilatation par un rhomboèdre. En comparant la figure 18a avec la 19a et la 19b, on remarque que les billes sont plus claires et plus grosses. Les petits défauts

brillent se traduisent par des tâches carrées (fig. 20a) ou des cônes à base carrée (figure 20b). Le fond est réduit en taille.

5. Les résidus morphologiques associés à l'érosion et la dilatation

Dans la première partie du chapitre, nous avons présenté l'érosion et la dilatation. La principale propriété de ces opérateurs est la propriété de croissance. Nous présentons maintenant une autre classe d'opérateurs morphologiques : les résidus morphologiques.

En morphologie mathématique ensembliste, un résidu morphologique peut être obtenu de deux manières différentes :

- Différence symétrique entre l'ensemble de départ \mathbf{X} et son transformé $\Psi(\mathbf{X})$
- Différence symétrique entre deux ensembles transformés $\Psi_1(\mathbf{X})$ et $\Psi_2(\mathbf{X})$

En morphologie mathématique fonctionnelle, un résidu morphologique est obtenu par :

- Différence arithmétique entre $f(\mathbf{x})$ et $\Psi(f(\mathbf{x}))$
- Différence arithmétique entre $\Psi_1 f(\mathbf{x})$ et $\Psi_2 f(\mathbf{x})$

Comme la différence symétrique n'est pas un opérateur croissant, on va perdre cette propriété pour les résidus.

Dans le cas où les ensembles auraient été transformés par érosion ou dilatation, les résidus morphologiques sont des *gradients morphologiques*.

5.1 Les gradients morphologiques

On distingue trois catégories de gradients :

- Le gradient morphologique symétrique
- Le gradient morphologique interne
- Le gradient morphologique externe

Ces gradients permettent de mettre en évidence les contours dans les images.

5.1.1 Le gradient morphologique symétrique

Le gradient morphologique symétrique est obtenu en faisant la différence entre l'image dilatée et l'image érodée par le même élément structurant $\mathbf{1B}$ convexe de taille unitaire.

En termes ensemblistes cela s'écrit :

$$\text{mgrad}_{\mathbf{1B}}(\mathbf{X}) = \delta_{\mathbf{1B}}(\mathbf{X}) / \varepsilon_{\mathbf{1B}}(\mathbf{X})$$

On a donc pour les fonctions :

$$\text{mgrad}_{\mathbf{1B}}(f(\mathbf{x})) = \delta_{\mathbf{1B}}(f(\mathbf{x})) - \varepsilon_{\mathbf{1B}}(f(\mathbf{x}))$$

Si l'élément structurant est symétrique, (carré, hexagone), on obtient une information de contour dans toutes les directions. Si l'élément structurant est linéaire on aura un gradient directionnel.

5.1.2 Le gradient morphologique interne (gradient par érosion)

Le gradient morphologique symétrique est obtenu en faisant la différence entre l'image initiale et l'image érodée par le même élément structurant $\mathbf{1B}$ convexe de taille unitaire.

$$\text{mgrad}_{\mathbf{1B}}^-(\mathbf{X}) = \mathbf{X} / \varepsilon_{\mathbf{1B}}(\mathbf{X})$$

On a pour les fonctions :

$$\text{mgrad}_{\mathbf{1B}}^-(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\mathbf{1B}}(f(\mathbf{x}))$$

5.1.3 Le gradient morphologique externe (gradient par dilatation)

Il est obtenu en faisant la différence entre l'image dilatée et l'image initiale. Pour les ensembles, on a :

$$\text{mgrad}_{\text{IB}}^+(\mathbf{X}) = \delta_{\text{IB}}(\mathbf{X}) / \mathbf{X}$$

Pour les fonctions, cela donne :

$$\text{mgrad}_{\text{IB}}^+(f(x)) = \delta_{\text{IB}}(f(x)) - f(x)$$

La figure 21 illustre les différents gradients que l'on peut obtenir à partir d'un ensemble en maille carrée. Les gradients interne et externe ont une épaisseur d'un pixel. Ils correspondent respectivement à la frontière interne et externe de l'ensemble X. Le gradient symétrique a une épaisseur de 2 pixels.

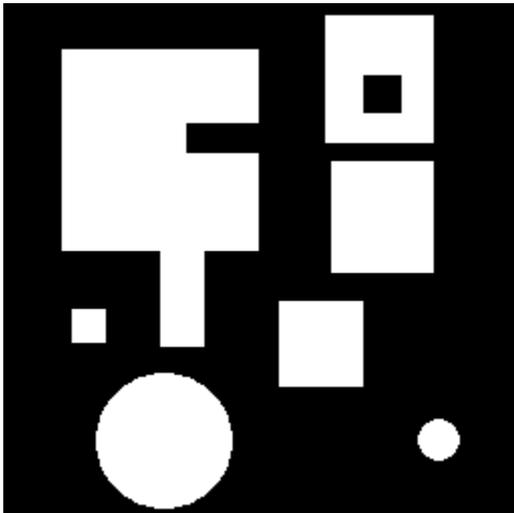


Figure 21a : Ensemble X.

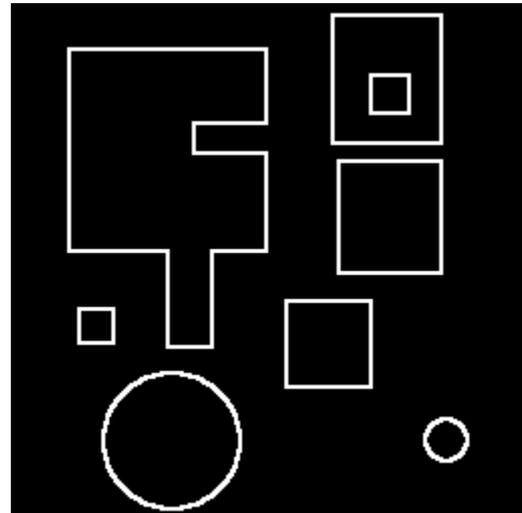


Figure 21b : Gradient morphologique de X.

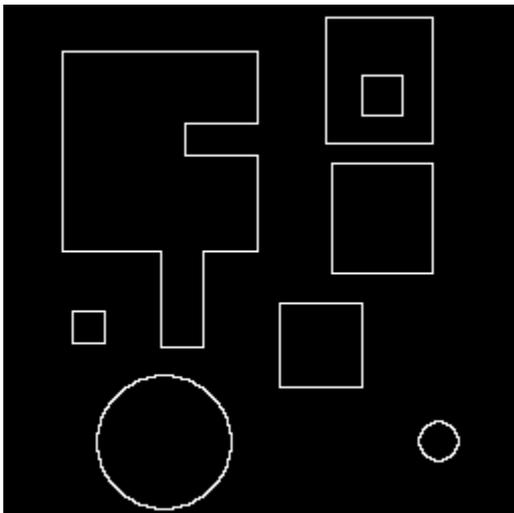


Figure 21c : Gradient morphologique interne de X.

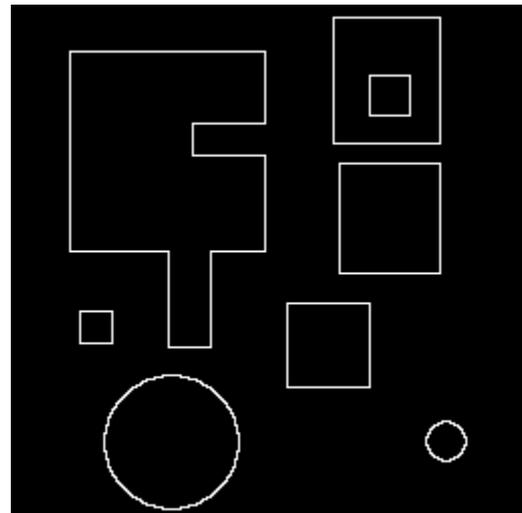


Figure 21c : Gradient morphologique externe de X.

La figure 22 illustre le même opérateur dans le cas d'une image en niveaux de gris.

Morphologie mathématique : érosion dilatation

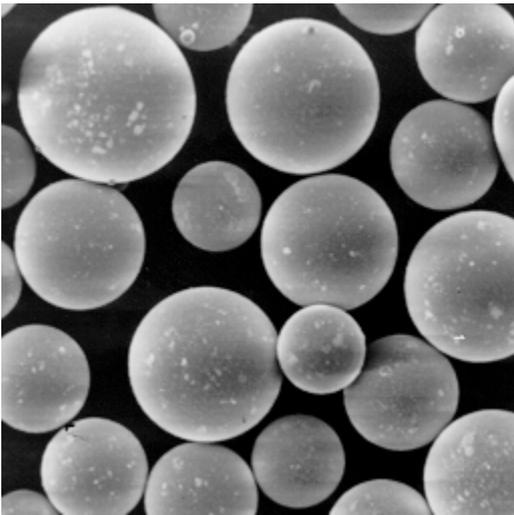


Figure 22a : Image de billes de verre.

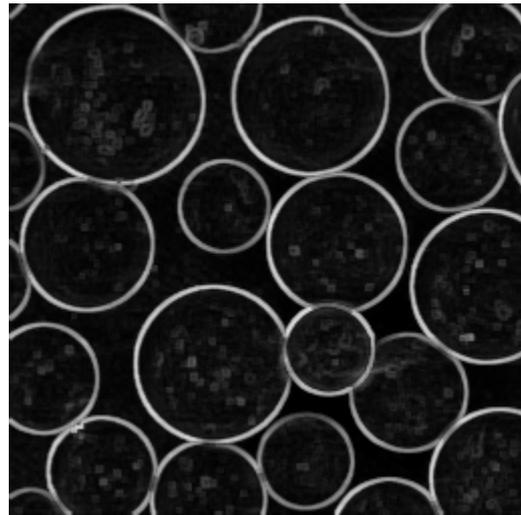


Figure 22b : Gradient morphologique de 22a.

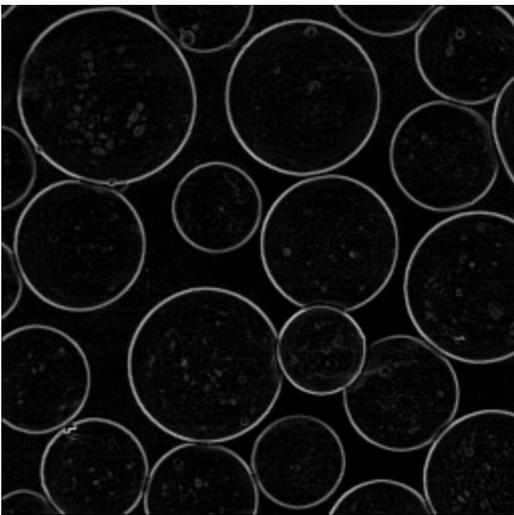


Figure 21c : Gradient morphologique interne de 22a.

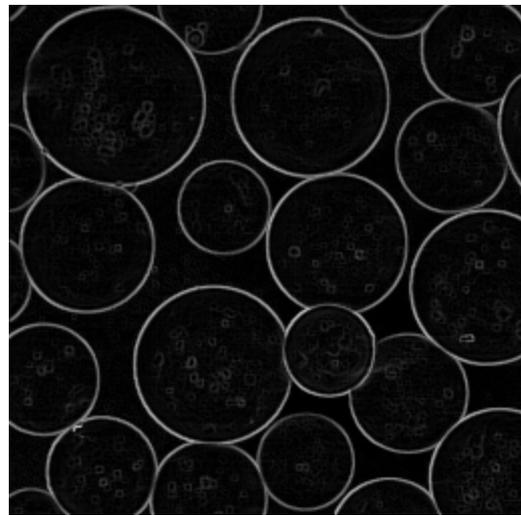


Figure 21d : Gradient morphologique externe de 22a.

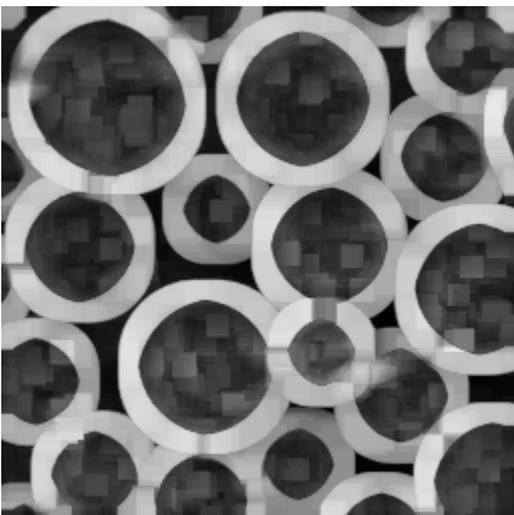


Figure 21e : Gradient morphologique étendu en maille carré de taille 5 à partir de l'image 22a.

5.1.4 Extension du gradient

Le gradient morphologique utilise un élément structurant convexe de taille 1. On peut également faire varier la taille de cet élément structurant et obtenir ainsi des contours plus grossiers. Ceci est illustré par la figure 22e.

5.2 Le laplacien morphologique

Le laplacien morphologique est le résidu du gradient morphologique externe et du gradient morphologique interne :

$$m\text{laplacien}(f(x)) = m\text{grad}_{IB}^+(f(x)) - m\text{grad}_{IB}^-(f(x))$$

Contrairement aux gradients morphologiques, le laplacien morphologique peut conduire à des valeurs négatives pour la fonction obtenue. Cet effet peut se voir sur l'image gradient totalement positive correspondant à un décalage des niveaux de gris de 128, (figure 23).

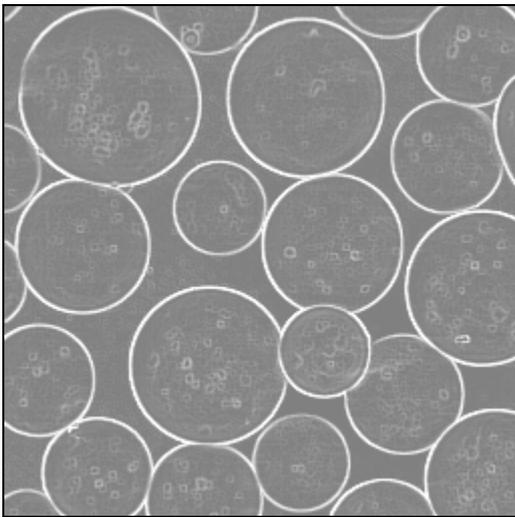


Figure 23a : Gradient morphologique interne de 22a décalé de 128 niveaux.

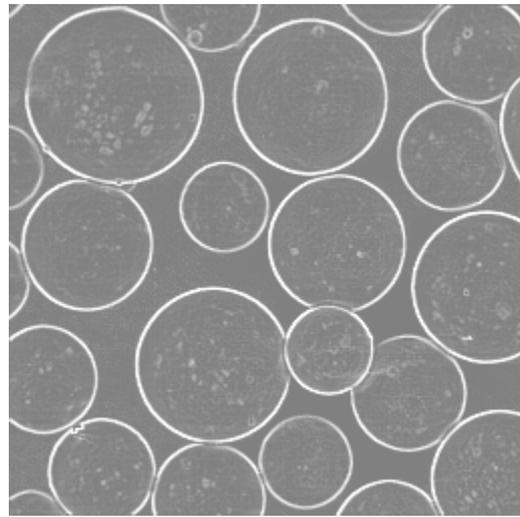


Figure 23b : Gradient morphologique externe de 22a décalé de 128 niveaux.

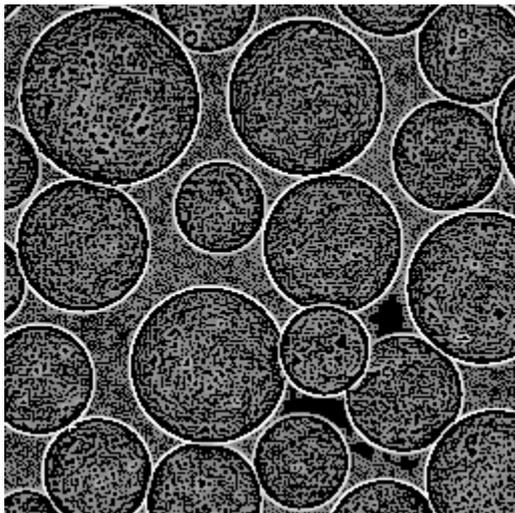


Figure 23c : Laplacien morphologique calculé à partir des gradients décalés.

Remarque : quand le pas de la grille d'échantillonnage tend vers 0, on trouve le module du gradient et le laplacien euclidiens, s'ils existent.

6. Une mesure associée à l'érosion et la dilatation : la distance

Il y a deux catégories de distance que l'on peut déterminer à partir de l'érosion et de la dilatation :

- La distance d'un point d'un ensemble à sa frontière.
- La distance d'un point du complémentaire à un ensemble.

6.1 Distance d'un point d'un ensemble à sa frontière

6.1.1 Définition

La distance d'un point $y \in X$ à la frontière ∂X s'écrit :

$$d(y, \partial X) = \inf (d(y, x) : x \in \partial X)$$

Cette distance est illustrée par la figure 24.

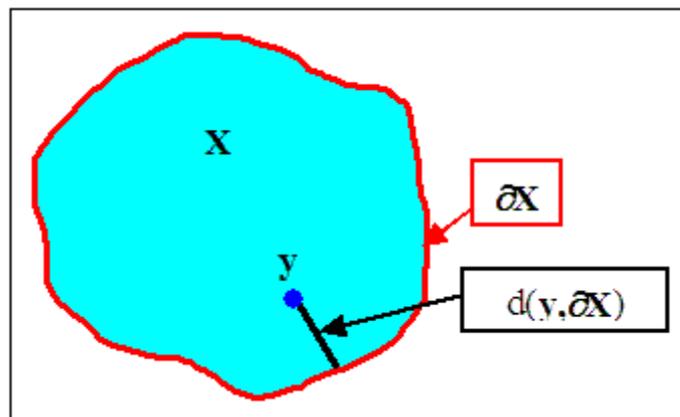


Figure 24 : Distance d'un point de X à sa frontière.

6.1.2 Fonction distance

A chaque point de X, on peut donc associer sa distance à la frontière. La fonction densité de ces distances (histogramme) s'appelle la *fonction distance de l'ensemble*. La *cartographie de ces distances* selon la maille carrée ou la maille hexagonale peut être obtenue facilement à partir de l'érosion morphologique.

Pour cela on procède de la manière suivante, en partant de l'image binaire bin1 contenant X :

- Création d'une image en niveaux de gris vide grey0.
- Copie de bin1 dans grey0 (avec $f(x) = 1$ si $x \in X$ sinon $f(x) = 0$)
- Tant que bin1 n'est pas vide faire
 - $\varepsilon_{B1}(\text{bin1}) \rightarrow \text{bin1}$
 - Copie de bin1 dans grey1 (avec $f(x) = 1$ si $x \in X$ sinon $f(x) = 0$)
 - $\text{grey0} = \text{grey0} + \text{grey1}$
- Fin de boucle

En effet les premiers pixels qui disparaissent appartiennent à la frontière, ils auront la valeur 1. A l'érosion suivante on enlève les pixels distants de 1 des précédents, ils auront la valeur 2 et ainsi de suite. A la fin l'image en niveaux de gris contiendra la cartographie des distances et *l'histogramme des niveaux de gris représentera* (avec un décalage de 1) *la fonction distance de l'ensemble X*. Cette procédure est illustrée par la figure 25.



Figure 25a : Ensemble X.



Figure 25b : Cartographie des distances de l'ensemble X en maille carrée 8-connectivité.

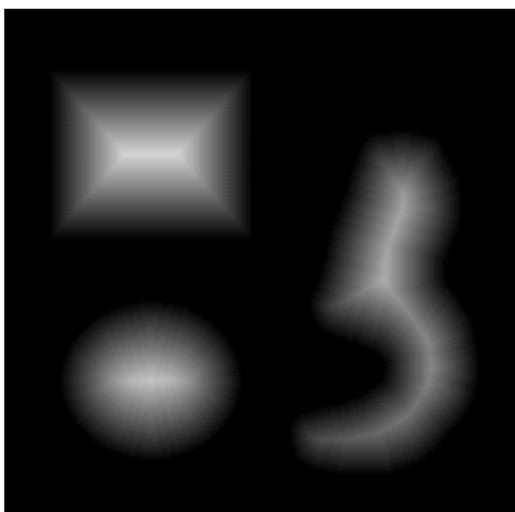


Figure 25c : Cartographie des distances de l'ensemble X en maille hexagonale avec un dodécagone.

Dans le cas d'un ensemble rectangulaire, les pixels les plus clairs apparaissent au niveau des bissectrices. On reverra cette propriété lors de l'étude du squelette.

Lorsque l'érosion est faite avec un dodécagone à la place du carré, on obtient la cartographie de la figure 25c. Les résultats sont plus proches de ceux qu'on obtiendrait dans \mathbf{R}^2 car le dodécagone est plus isotrope.

6.2 Distance d'un point ou d'un ensemble à un autre ensemble

6.2.1 Rappels

Cette mesure a été introduite, pour l'espace continu, dans le chapitre précédent^b. La distance d'un point à un ensemble est donnée par la relation :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \text{Inf}_{y \in \mathbf{Y}} (d(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

^b Notions de topologie

De la même manière, on a défini la distance euclidienne entre deux ensembles. Elle se calcule à partir de l'expression :

$$d(X, Y) = \inf_{x \in X \text{ et } y \in Y} (d(x, y))$$

6.2.2 Dilatation et distance euclidienne entre deux ensembles

Signalons d'abord que la distance d'un point à un ensemble n'est qu'un cas particulier de la distance euclidienne entre deux ensembles.

L'utilisation de ces deux expressions pour calculer cette distance est assez fastidieuse, puisqu'il faut tester toutes les combinaisons de couple de points. L'utilisation de la dilatation représente une alternative élégante et donnera la distance discrète correspondante.

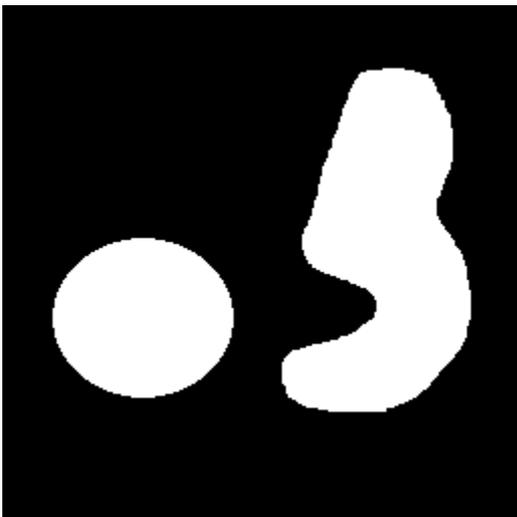


Figure 26a : Ensemble X.

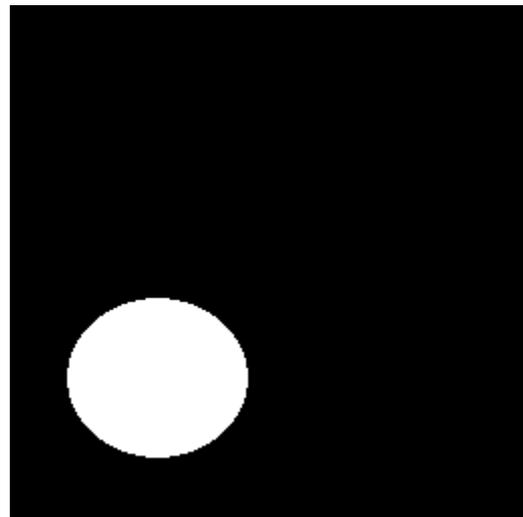


Figure 26b : Composante X_i .

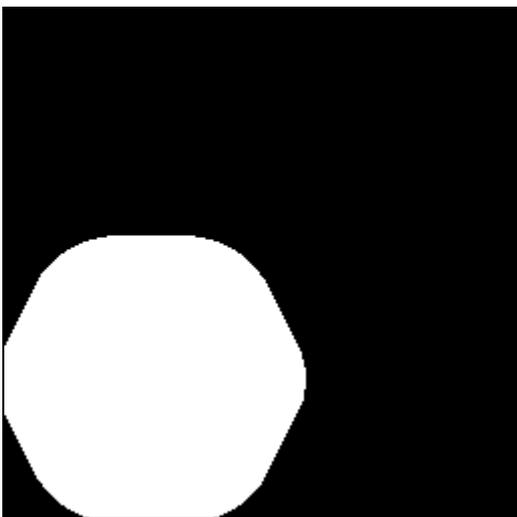


Figure 26c : $\delta_{B=32}(X_i)$

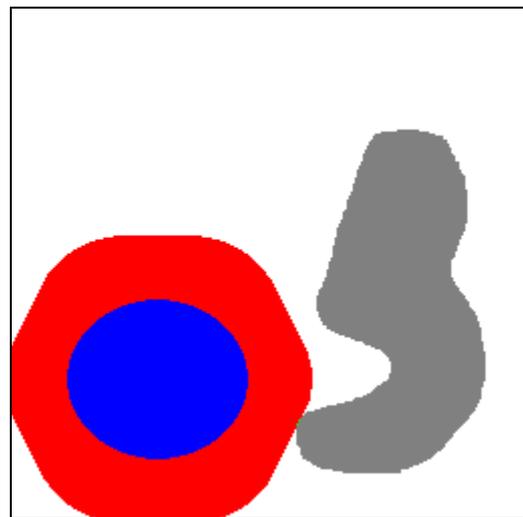


Figure 26d : Superposition de X_i , son dilaté de taille 32 et de X/X_i .

Morphologie mathématique : érosion dilatation

Considérons la figure 26a qui montre deux ensembles disjoints dont on veut connaître la distance. La procédure adoptée sera la suivante :

- bin0 = image binaire contenant \mathbf{X}
- Extraction de la composante connexe \mathbf{X}_i qui est placée dans l'image bin1
- $\text{bin2} = \text{bin0} / \text{bin1}$ (on place dans bin2 toutes les autres composantes connexes dans bin2)
- Création d'une image binaire bin3 vide
- $d = 0$ (initialisation de la valeur de la distance entre \mathbf{X}_i et $(\mathbf{X} / \mathbf{X}_i)$)
- Tant que bin3 est vide faire
 - $\delta_{B1}(\text{bin1}) \rightarrow \text{bin1}$
 - $d = d + 1$
 - $\text{bin3} = \text{bin1} \cup \text{bin2}$
- Fin de boucle

Le nombre de pas de dilatation donne la distance discrète entre \mathbf{X}_i et $(\mathbf{X} / \mathbf{X}_i)$. Ceci est illustré par la figure 26b à 26d avec B élément structurant carré en 8-connexité.

¹H. Hadwiger « Vorslesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie » Springer Verlag Berlin 1957.

²G. Matheron « Les variables régionalisées et leur estimation » Masson Paris 1965

³G. Matheron « Eléments pour une théorie des milieux poreux » Masson Paris 1967

⁴J. Serra « Introduction à la morphologie mathématique » Cahiers du Centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique. Ecole des Mines de Paris. Fontainebleau 1969, N°3.

⁵ Minkowski H. "Volumen und Oberfläche" *Math. Ann.* 1903, 57, 447-495.